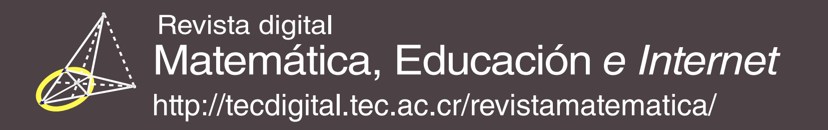
Instituto Tecnológico de Costa Rica

Problemas de exámenes y soluciones

XXX OLIMPIADA COSTARRICENSE DE MATEMÁTICAS

2018

Christian Páez Páez
Marvin Abarca Fuentes
Leonel Chaves Salas
Alexánder Hernández Quirós
Gabriela Calderón Torres
Federico Mora Mora
Jeremías Ramírez Jiménez
David Jiménez López
Germán Mora Sáenz
Emanuel Chaves Villalobos
Salomón Hernández Chaves



(https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/).

Christian Páez Páez
Marvin Abarca Fuentes
Leonel Chaves Salas
Alexander Hernández Quirós
Erick Pizarro Carrillo
Jeremías Ramírez Jiménez
David Jiménez López
German Mora Sáenz
Emmanuel Chaves Villalobos
Salomón Hernández Chaves
Miembros de OLCOMA, 2018

Problemas de exámenes y soluciones

XXX Olimpiada Costarricense de Matemáticas

Edición del 2018



Páez Páez, Christian; Abarca Fuentes, Marvin; Chaves Salas, Leonel; Hernández Quirós, Alexander; Pizarro Carrillo, Erick; Ramírez Jiménez, Jeremías; Jiménez López, David; Mora Sáenz, German; Chaves Villalobos, Emmanuel; Hernández Chaves, Salomón.
Problemas de exámenes y soluciones de la XXX Olimpiada Costarricense de Matemáticas.
– OLCOMA, 2018.
ISBN Obra independiente:978-9930-541-65-4

Revista digital
Matemática, Educación e Internet

Escuela de Matemática
Instituto Tecnológico de Costa Rica
Apdo. 159-7050, Cartago
Teléfono (506)25502225
Fax (506)25502493

Miembros de OLCOMA, 2018

Christian Páez
cpaez@itcr.ac.cr
Instituto Tecnológico de Costa Rica, Escuela de Matemática.. Costa Rica.

Marvin Abarca
mabarca@itcr.ac.cr
Instituto Tecnológico de Costa Rica, Escuela de Matemática. . Costa Rica.

Leonel Chaves
leonel.chaves.salas@una.cr
Universidad Nacional, Escuela de Matemática.. Costa Rica.

Alexander Hernández
alexander.hernandez.quiros@una.cr
Universidad Nacional, Escuela de Matemática.. Costa Rica.

Gabriela Calderón
maria.calderon.torres@una.cr
Universidad Nacional, Escuela de Matemática. . Costa Rica.

Federico Mora
federico.mora.mora@una.cr
Universidad Nacional, Escuela de Matemática. Costa Rica.

Jeremías Ramírez
jeremias.ramirez.jimenez@una.cr
Universidad de Costa Rica, Escuela de Matemática. . Costa Rica.

David Jiménez
david.jimenezlopez@ucr.ac.cr
Universidad de Costa Rica, Escuela de Matemática. . Costa Rica.

German Mora
germorasaenz@gmail.com
Universidad de Costa Rica, Escuela de Matemática. . Costa Rica.

Emmanuel Chaves
echavesv@uned.ac.cr
Universidad Estatal a Distancia, Escuela de Ciencias Exactas y Naturales.. Costa Rica.

Salomón Hernández
shernandezch@hotmail.com
Universidad Estatal a Distancia, Escuela de Ciencias Exactas y Naturales. . Costa Rica.

Citar como:
C. Páez et al. (2020) “Problemas de exámenes y soluciones, XXX Olimpiada Costarricense de Matemáticas. Edición del 2018.” Revista digital, Matemática, Educación e Internet.
https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/
Recuperado, fecha

Contenido

Prólogo

OLCOMA es la Comisión de Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas. Esta comisión está conformada por académicos en el área de Matemática de la Universidad Nacional (UNA), del Instituto Tecnológico de Costa Rica (TEC), de la Universidad de Costa Rica (UCR), de la Universidad Estatal a Distancia (UNED), por un representante del Ministerio de Educación Pública (MEP) y un representante del Ministerio de Ciencia, Tecnología y Telecomunicaciones (MICITT).

Dentro de la estructura de las Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas, se tienen tres niveles de competencia. En Nivel I participan estudiantes de sétimo año (también pueden optar por participar en este nivel los estudiantes de primaria que cursan sexto grado). En Nivel II participan estudiantes de octavo y noveno años. En Nivel III participan estudiantes de décimo, undécimo y duodécimo años.

Durante el año se tienen tres etapas. En la I Eliminatoria los estudiantes resuelven un examen de selección única con 25 ítems. En la II Eliminatoria, los que clasificaron realizan un examen que posee 12 preguntas de selección única y tres problemas de desarrollo. En la Etapa Final, los estudiantes clasificados realizan dos pruebas en días consecutivos, cada prueba contiene tres problemas de desarrollo. Los temas principales que se evalúan en cada una de las pruebas son Geometría, Razonamiento Lógico, Probabilidad, Teoría de Números, Álgebra, Trigonometría y Funciones.

El objetivo de este libro es que los futuros participantes en Olimpiadas Costarricenses de Matemáticas posean material de consulta; de esta manera, los problemas que en este libro se enuncian representan un reto para quienes gustan resolver ejercicios matemáticos. Cada uno de los problemas tiene la solución respectiva, así que una vez que intenten resolver cada problema pueden comparar el procedimiento realizado con la solución propuesta. Se han incorporado todos los problemas de las tres eliminatorias de los tres niveles (incluyendo la totalidad de los problemas propuestos para conformar los exámenes de la Etapa Final).

Cartago, febrero de 2020 CHRISTIAN PÁEZ PÁEZ

Agradecimientos

En relación con la edición XXX de la Olimpiada Costarricense de Matemáticas, se agradece toda la ayuda en la parte administrativa y logística que brindó Daniela Cascante Abarca.

Además, se agradece a todos los estudiantes del TEC, de la UNA y de la UCR que colaboraron en la aplicación de las pruebas de II Eliminatoria, así como a los que impartieron talleres de preparación a clasificados a II Eliminatoria y Etapa Final.

A los representantes de distintas instituciones públicas que conforman OLCOMA y que dan apoyo en la parte administrativa: Juan Pablo Serrano Echeverría (MEP), Teresita Quesada Granados (MICITT), Pedro Méndez Hernández (UCR).

En especial, a los representantes académicos de cada una de las instituciones públicas que conforman OLCOMA, por su dedicación y esmero en la propuesta de preguntas y soluciones, apoyo en logística y preparación de estudiantes que nos representaron en los eventos internacionales.

UNA: Leonel Chaves Salas, Alexander Hernández Quirós y Erick Pizarro Carrillo (Federico Mora Mora estuvo parte del año).

TEC: Christian Páez Páez y Marvin Abarca Fuentes.

UCR: Jeremías Ramírez Jiménez, David Jiménez López y German Mora Sáenz (Edward Coto Mora y Leiner Víquez García estuvieron parte del año 2018).

UNED: Emmanuel Chaves Villalobos y Salomón Hernández Chaves.

Capítulo 1

I Eliminatoria

1.1 Nivel I

1.1.1 Razonamiento Lógico y Probabilidad

Ejemplo 1.1

Para las pasadas fiestas de Palmares se estima que asistieron cuatro mujeres adultas por cada tres hombres adultos, tres niñas por cada cuatro niños y un niño por cada tres hombres adultos. La razón de mujeres adultas a niñas que asistieron a dichas fiestas es

(a) $1:4$

(b) $2:3$

(c) $4:3$

(d) $16:3$

Solución:
Sean $M =$ cantidad de mujeres adultas, $H =$ cantidad de hombres adultos, $N_a =$ cantidad de niñas y $N_o =$ cantidad de niños.

Las razones propuestas en el ejercicio son $\dfrac{M}{H} = \dfrac{4}{3}$, $\dfrac{N_a}{N_o} = \dfrac{3}{4}$ y $\dfrac{N_o}{H} = \dfrac{1}{3}$

Lo que significa que: $\dfrac{N_a}{N_o} \cdot \dfrac{N_o}{H} = \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4} \Rightarrow \dfrac{N_a}{H} = \dfrac{1}{4}$ y $\dfrac{M}{H} \cdot \dfrac{H}{N_a} = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{4}{1} = \dfrac{16}{3} \Rightarrow \dfrac{M}{N_a} = \dfrac{16}{3}$

Es decir, la opción (d) $16:3$ es la razón de mujeres adultas a niñas que asistieron a las fiestas.

Ejemplo 1.2

Una bolsa de papel contiene 22 bolas iguales, excepto que dos de ellas son rojas, tres azules, diez blancas, cuatro verdes y tres negras. Las bolas son extraídas de la bolsa al azar y sin devolverlas. La cantidad mínima de bolas que deben extraerse para obtener dos del mismo color es

(a) 4

(b) 5

(c) 6

(d) 9

Solución:
No importa tanto el número de bolas de cada color, sino que haya al menos dos.
Como son cinco colores diferentes, se necesitan sacar al menos seis (principio del palomar) para asegurar que al menos dos bolas son del mismo color. Opción (c) es la correcta.

1.1.1 En el siguiente tablero 4×4 se escribió en cada casilla una operación, de manera que en cada fila y en cada columna los resultados contienen cada número del 1 al 4. Sin embargo, se borraron algunas casillas; la operación que podría estar en la esquina inferior derecha es

(a) $9-8$

(b) $6 \div 3$

(c) 1×4

(d) $2+1$

1×1		1×3	
2×2	$6-3$		$6-5$
$4-1$	$1+3$	$8-7$	
$9-7$	$2-1$		?

1.1.2 El collar que se muestra en la figura adjunta contiene perlas oscuras y perlas claras. Carlos toma una perla tras otra del collar, siempre de alguno de los dos extremos. Si se detiene tan pronto toma la quinta perla oscura, el mayor número de perlas claras que pudo tomar Carlos es

(a) 4

(b) 5

(c) 6

(d) 7

Ejemplo 1.3

Se escriben los números enteros positivos desde el uno hasta el 2018, consecutivamente, sin espacios intermedios, formando una larga secuencia de dígitos:

$$12345678910111213\ldots201620172018$$

La cantidad de dígitos que se escriben antes de que se escriban tres 8 seguidos es

(a) 164

(b) 165

(c) 166

(d) 167

Solución:
La primera vez que aparecen tres 8 seguidos, ocurre al escribir 88 y 89. Se debe contar entonces la cantidad total de dígitos al escribir los números del 1 al 88, justo antes de $\ldots 8788\mathbf{8}990\ldots$ Del 1 al 9 hay 9 dígitos. Del 10 al 88 hay $79 \cdot 2 = 158$ dígitos. En total hay 167 dígitos, por lo que (d) es la opción correcta.

1.1.3 La diferencia entre 120% de 30 y 130% de 20 es

(a) 0

(b) 5

(c) 8

(d) 10

1.1.4 Una caja contiene únicamente monedas y anillos; ambos objetos están hechos de oro o de plata. Se sabe, además, que 20% de estos objetos en la caja son anillos y 40% de las monedas son de plata. Si en la caja hay exactamente 156 monedas de oro, entonces la cantidad de anillos en la caja es

(a) 65

(b) 82

(c) 104

(d) 169

Ejemplo 1.4

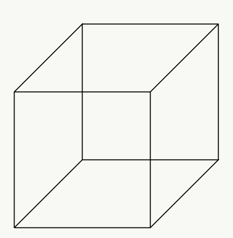
Considere un cubo como el que se muestra en la figura adjunta. La cantidad de triángulos tales que sus tres vértices son los vértices del cubo es

(a) 12

(b) 24

(c) 56

(d) 60



Solución:

Si se escoge un vértice cualquiera entonces se puede formar un triángulo con cualquier otro par de vértices del cubo; de los restantes 7 vértices hay 7 formas de escogerlo, y de los 6 que quedan, hay 6 formas, sin embargo, hay que dividir entre dos, pues cada par que se escoge se contó dos veces. Por lo anterior, existen $\dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$ formas.

Por otro lado, el vértice inicial se puede escoger de 8 formas, pero, al igual que antes, cada triplete de vértices se cuenta 3 veces; entonces, la cantidad total de triángulos es $\dfrac{8 \cdot 21}{3} = 56$, (c) es la opción correcta.

Ejemplo 1.5

Una cantidad par de personas decide bailar entre sí en una circunferencia. Cada persona baila con quien que se encuentra diametralmente opuesta a ella.

Si las personas están numeradas con $1, 2, 3, \ldots$ de manera consecutiva, y si se sabe que la persona que tiene el número 24 baila con la que tiene el número 73, entonces la cantidad de personas que se encuentran bailando es

(a) 96

(b) 98

(c) 100

(d) 102

Solución:

Si $2n$ es la cantidad total de personas, entonces la persona 1 baila con la $n+1$. Como la persona 24 baila con la 73, entonces se tiene que $n + 1 + 23 = 73$; así, $n = 49$ y la cantidad total de personas es 98, siendo (b) la opción correcta.

1.1.5 En una caja hay seis bolas blancas, 16 bolas rojas y el resto son bolas azules. Todas las bolas son del mismo peso, contextura y tamaño. Si la probabilidad de extraer, al azar, una bola blanca de la caja es $0,15$, entonces la probabilidad de extraer una bola azul es

(a) $0,40$

(b) $0,45$

(c) $0,50$

(d) $0,75$

1.1.2 Teoría de Números

Ejemplo 1.6

La suma de los dígitos del mayor divisor del número $n = 1\,223\,334\,444$, distinto de n, es

(a) 32

(b) 33

(c) 34

(d) 35

Solución:
Como el número es par, se tiene que $n = 2k$, con $k = n \div 2$ divisor de n. Como se pide el mayor divisor distinto del número original, este es precisamente $k = n \div 2 = 611\,667\,222$, cuyas cifras suman 33 y (b) sería la respuesta correcta.

1.1.6 Hoy es sábado y Ricardo inicia la lectura de un libro de 200 páginas. Ricardo solo puede leer seis páginas cada día, excepto los sábados que puede leer 25 páginas. La cantidad mínima de días que le tomará a Ricardo leer el libro completamente es

(a) 22

(b) 23

(c) 24

(d) 25

Ejemplo 1.7

Cuando el entero positivo x se divide por 5, el residuo es 2. El residuo cuando $3x$ se divide por 5 es

(a) 1

(b) 2

(c) 3

(d) 5

Solución:
Por el algoritmo de la división se tiene que $x = 5c + 2$, donde c es el cociente; ahora bien, si se multiplica por tres, se obtiene $3x = 3(5c + 2) = 15c + 6 = 15c + 5 + 1 = 5(3c + 1) + 1$; haciendo $k = 3c + 1$ se tiene que $3x = 5k + 1$. Por lo tanto el residuo es 1 y (a) es la opción correcta.

1.1.7 Si seis trabajadores construyen un muro en 10 días, con una jornada de ocho horas diarias, entonces la cantidad de trabajadores que se necesita para construir un muro igual al anterior pero en cinco días con jornadas de cuatro horas diarias, corresponde a

(a) 6

(b) 12

(c) 24

(d) 32

1.1.8 Si se sabe que $\dfrac{x}{y} = \dfrac{6}{5}$ y que $\dfrac{y}{z} = \dfrac{4}{5}$, se puede asegurar que el valor numérico de $\dfrac{x^2 z}{y^3}$ es

(a) $\dfrac{216}{125}$

(b) $\dfrac{144}{125}$

(c) $\dfrac{9}{5}$

(d) 9

Ejemplo 1.8

Si al dividir 2018 por un número desconocido se obtiene 143 de residuo, entonces es verdadero que el producto del cociente por el divisor es

(a) par

(b) primo

(c) múltiplo de 3

(d) múltiplo de 11

Solución:
Sea p el divisor y q el cociente. Por el algoritmo de la división se tiene:

$$2018 = p \cdot q + 143 \Rightarrow 2018 - 143 = p \cdot q \Rightarrow 1875 = p \cdot q$$

Así, el producto del cociente por el divisor es múltiplo de 3, por lo que (c) es la opción correcta.

1.1.9 En una finca se tienen tres cerdos, seis gallinas y cierto número de vacas. Si se contaron 44 patas entre todos los animales, el número de vacas de la finca es

(a) 6

(b) 5

(c) 4

(d) 3

1.1.10 Carlos y María empiezan a correr alrededor de una pista de entrenamiento al mismo tiempo y cada uno de ellos corre con una rapidez constante: Carlos corre siete vueltas en 15 minutos, mientras que María cinco vueltas en 12 minutos. Cuando ambos llegaron juntos a la meta por primera vez, Carlos observó que había pasado una cantidad entera de minutos. El total de vueltas que dio Carlos en la pista de entrenamiento cuando llegaron a la meta juntos por primera vez es

(a) 25

(b) 28

(c) 30

(d) 60

1.1.3 Geometría

Ejemplo 1.9

En la figura adjunta, C es el punto de intersección de $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$, $AB = BC$ y $CE = CD$. Si $m\angle CED = 55°$, entonces $m\angle ABC$ es

(a) 40°

(b) 55°

(c) 70°

(d) 80°



Solución:

Como $\triangle DCE$ es isósceles, entonces $\angle CED \cong \angle CDE$.
Luego, $m\angle DCE = 180° - 55° - 55° = 70°$ y, por ser opuesto por el vértice al ángulo anterior, $m\angle BCA = 70°$.
Como $\triangle ABC$ es isósceles, $m\angle BCA = m\angle BAC = 70°$.
Por lo tanto, $m\angle ABC = 180° - 70° - 70° = 40°$ y (a) es la opción correcta.

1.1.11 Considere el $\triangle ABC$ isósceles y acutángulo, tal que $AC = BC$. Si $A - M - C$, con $AM = AB$, y $m\angle ACB = 40°$, entonces $m\angle MBC$ es

(a) 15°

(b) 40°

(c) 55°

(d) 70°

1.1.12 Considere el triángulo isósceles $\triangle ABC$, con $AB = AC$. Si M es un punto sobre $\overline{BC}$, tal que $\overline{AM} \perp \overline{BC}$, entonces $m\angle MAB + m\angle BCA$ es

(a) 120°

(b) 90°

(c) 60°

(d) 45°

Ejemplo 1.10

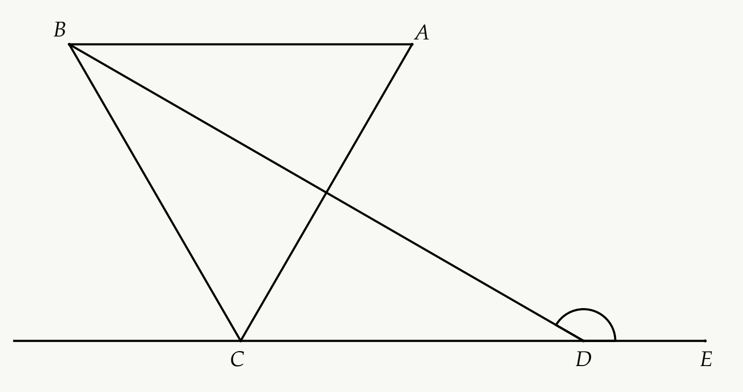
En la figura adjunta, el $\triangle ABC$ es equilátero, D está en $\overleftrightarrow{CE}$, $\overline{AB} \parallel \overleftrightarrow{CE}$ y $\overline{DB}$ divide al $\angle CBA$ en dos ángulos de igual medida. Con certeza, $m\angle BDE$ es

(a) $4 \cdot m\angle ABD$

(b) $5 \cdot m\angle ABD$

(c) $m\angle BCA + m\angle ACD$

(d) $m\angle BCA + m\angle CBD$



Solución:
Como el triángulo ABC es equilátero, cada uno de sus ángulos internos mide $60°$. $\overline{BD}$ biseca al $\angle CBA$ y $\overline{BA} \parallel \overline{CD}$, así que $m\angle ABD = 30° = m\angle BDC$.
Luego, $m\angle BDE = 150° = 5 \cdot 30° = 5 \cdot m\angle ABD$, que corresponde con la opción (b).

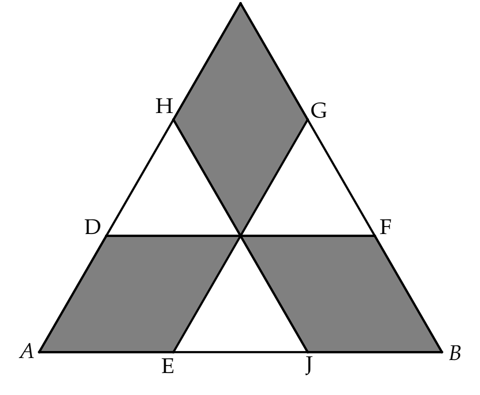
1.1.13 En la figura adjunta, el $\triangle ABC$ es equilátero y su área es 18 m^2. Además, los puntos G y F, E y J, así como D y H dividen, respectivamente, a los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en tres segmentos de igual medida. El área, en m^2, de la región sombreada es

(a) 6

(b) 9

(c) 12

(d) 16



Ejemplo 1.11

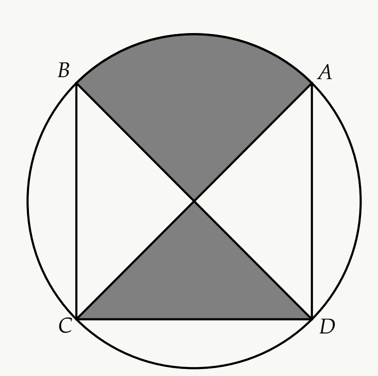
En la figura adjunta, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son diámetros del círculo de área p; además, $\square ABCD$ es un cuadrado de área q. Si ambas áreas están dadas en metros cuadrados, el área de la región sombreada, en metros cuadrados, es

(a) $\frac{p}{2} + \frac{q}{2}$

(b) $\frac{p}{2} + \frac{q}{3}$

(c) $\frac{p}{4} + \frac{q}{3}$

(d) $\frac{p}{4} + \frac{q}{4}$



Solución:

Note que p es mayor que q. Además, $p+q$, por ejemplo, sería sumar las áreas de las dos figuras (como si estuvieran separadas).

Si O es el punto de intersección de los diámetros, entonces $(COD) = \dfrac{(ABCD)}{4}$ y el área del sector circular restante es la cuarta parte del área del círculo.

Por lo tanto, el área de la región sombreada es $\dfrac{p+q}{4}$ que es la opción (d).

1.1.14 Considere un punto M en el interior del $\triangle ABC$ y sea N un punto tal que $B-N-C$ y $A-M-N$. Con certeza se puede asegurar que

(a) $AB + BC > AM + MC$

(b) $AB + BC < AM + MC$

(c) $2MB + MC + MN < 2BN + NC$

(d) $NC + BN > MC + MB + 2MN$

1.2 Nivel II

1.2.1 Razonamiento Lógico y Probabilidad

Ejemplo 1.12

Se escriben los números enteros positivos desde el uno hasta el 2018, uno a continuación del otro, sin espacios intermedios, formando una larga secuencia de dígitos:

$$12345678910111213\ldots 201620172018$$

La cantidad máxima de dígitos que se escriben antes de que se escriban tres 9 seguidos es

(a) 2586

(b) 2589

(c) 2597

(d) 2694

Solución:
La primera vez que aparecen tres 9 seguidos, ocurre al escribir 899 y 900. Del 1 al 9 hay 9 números de 1 dígito. Del 10 al 99 hay 90 números de 2 dígitos. Del 100 al 899 hay 800 números de 3 dígitos. De esta manera, $9+90\cdot 2+800\cdot 3=2589$ es la cantidad de dígitos escritos justo antes de que se presenten tres 9 seguidos y (b) es la respuesta correcta.

1.2.1 Gerardo y Mariam juegan con tres dados, el primer dado tiene tres caras rojas y tres negras, el segundo dado tiene cuatro caras rojas y dos negras, y el tercer dado tiene todas las caras rojas. El juego consiste en tirar dos de los tres dados, si las dos caras son del mismo color gana Gerardo, si las caras son de distinto color gana Mariam. Si Mariam selecciona el primer dado, entonces el dado que debe seleccionar Gerardo para tener mayor probabilidad de ganar es

(a) El dado 2

(b) El dado 3

(c) Indistinto, con ambos dados se tiene la misma probabilidad

(d) Imposible de determinar

1.2.2 Si la hija de Tiffany es la mamá de mi hija, entonces yo soy

(a) Tiffany

(b) La hija de Tiffany

(c) La nieta de Tiffany

(d) La mamá de Tiffany

1.2.3 En un pequeño pueblo solamente hay cuatro edificios.

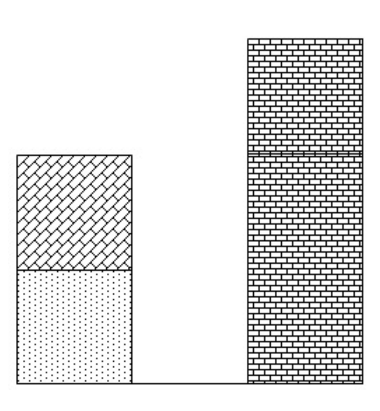
Estos edificios pueden tener 1, 2 o 3 pisos. Cada edificio tiene un estilo de fachada diferente: ladrillos horizontales, ladrillos diagonales, cuadriculado o punteado.

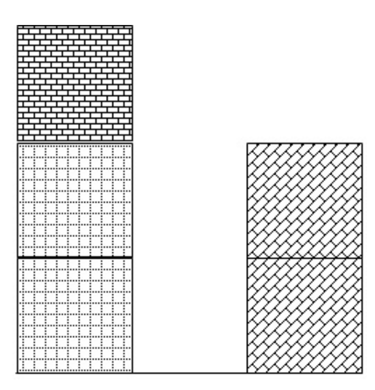
Norte

1		2
3		4

Sur

Si una persona observa el pueblo desde el Norte se tiene una vista como la que se indica en la primera figura (la de la izquierda), mientras que si observa desde el Sur se tiene la segunda figura (la de la derecha).





Se puede asegurar, con certeza, que una proposición **falsa** es

(a) El edificio 2 tiene 1 piso con fachada de puntos.

(b) El edificio 3 tiene 2 pisos con fachada cuadriculada.

(c) El edificio 4 tiene 2 pisos con fachada de ladrillos diagonales.

(d) El edificio 1 tiene 3 pisos con fachada de ladrillos diagonales.

Ejemplo 1.13

Erick acude a la casa de Rolando con la intención de comprar tres videojuegos. Al llegar, Rolando le ofrece cinco juegos de acción, cuatro de aventuras y tres de deportes; como Erick no puede decidirse, le pide a Rolando que escoja tres al azar. La probabilidad de que Erick adquiera uno de cada categoría es

(a) $\frac{3}{11}$

(b) $\frac{3}{44}$

(c) $\frac{3}{55}$

(d) $\frac{3}{110}$

Solución:

Sea A: un juego de cada categoría. La probabilidad de A está dada por

$$P(A) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{5}{1}}{\binom{12}{3}}$$

Como $\binom{3}{1} = \frac{3!}{(3-1)! \cdot 1!} = 3$, $\binom{4}{1} = \frac{4!}{(4-1)! \cdot 1!} = 4$, $\binom{5}{1} = \frac{5!}{(5-1)! \cdot 1!} = 5$ y $\binom{12}{3} = \frac{12!}{(12-3)! \cdot 3!} = 220$, se tiene que (a) es la opción correcta, ya que:

$$P(A) = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{220} = \frac{60}{220} = \frac{3}{11}$$

1.2.4 Inicialmente, en una pizarra está escrito el número 2018. Una persona realiza el siguiente procedimiento: toma el número escrito en la pizarra, lo multiplica por 2 y le suma 1, luego reemplaza el número escrito en la pizarra por el resultado obtenido. Si este procedimiento se realiza 2018 veces, entonces el dígito de las unidades del último número obtenido es

(a) 1

(b) 3

(c) 5

(d) 7

Ejemplo 1.14

Carlos y Fabricio llevan entre los dos, 60 000 colones al parque de diversiones. Incluyendo las entradas, Carlos gasta un total de 12 000 colones y Fabricio un total de 10 000 colones. Al finalizar el día, Carlos tiene el doble de dinero que tenía Fabricio al inicio del día. Al finalizar el día, la cantidad de dinero, en colones, que tiene Fabricio es

(a) 6000

(b) 8000

(c) 10 000

(d) 12 000

Solución:
Si Carlos inicialmente tenía x (en miles de colones), y Fabricio y (en miles de colones), entonces $x + y = 60$.
Además, $x - 12 = 2y$. Solucionando las ecuaciones, $x = 44$, $y = 16$. Por lo tanto, Fabricio queda con 6000 colones y (a) es la opción correcta.

1.2.5 En una cuadrícula 3×3 se colocan nueve números enteros consecutivos, ordenados de menor a mayor y siguiendo la distribución que se muestra en la figura adjunta. Si se sabe que la suma de los elementos colocados en dicha cuadrícula es 2277, entonces la suma de los elementos de la tercera fila es

(a) 750

(b) 764

(c) 766

(d) 769

1	2	3
5	4	8
6	7	9

1.2.6 Un ratón es perseguido por un gato. El ratón le aventaja por 98 de sus pasos al gato. Si por cada cinco pasos del ratón, el gato da tres pasos y, además, cuatro pasos del gato equivalen a nueve pasos del ratón, entonces el número de pasos que debe dar el gato para alcanzar al ratón es

(a) 153

(b) 162

(c) 168

(d) 171

1.2.2 Teoría de Números

Ejemplo 1.15

Se toman los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, y se forman tres números de tres dígitos cada uno, sin repetir ningún dígito. Si se suman los tres números, entonces el mayor resultado que se puede obtener es

(a) 1962

(b) 2457

(c) 2556

(d) 2628

Solución:
El mayor resultado posible se obtiene cuando los tres dígitos mayores (7, 8 y 9) están al inicio de los tres números, los siguientes tres dígitos (4, 5 y 6) en posición intermedia, y los tres menores en la posición de las unidades. Así, si los tres números son 963, 852 y 741, la suma es 2556 siendo (c) la opción correcta. Note que hay otras opciones para los números; por ejemplo, los números 951, 843 y 762 dan esa misma suma.

1.2.7 Sea $N = 123456789101112131415161718$. El residuo de la división de N por 45 es

(a) 0

(b) 8

(c) 9

(d) 18

Ejemplo 1.16

La cantidad de números de tres cifras que son cuadrados perfectos y múltiplos de 6 es

(a) 3

(b) 4

(c) 6

(d) 7

Solución:
Los cuadrados perfectos de 3 cifras corresponden a los cuadrados de 10 hasta 31.
Para que sean múltiplos de 6, sus bases deben serlo. Los únicos que cumplen esto son 12, 18, 24 y 30, por lo que solamente hay 4 números que satisfacen lo pedido y (b) es la opción correcta.

1.2.8 El número de parejas de números naturales para las cuales el mínimo común múltiplo es igual a 2018 corresponde a

(a) 3

(b) 4

(c) 5

(d) 6

1.2.9 German y Leonardo van a correr dando vueltas a una pista ovalada con 400 metros de longitud. Ellos comienzan al mismo tiempo, pero Leonardo se adelanta, pues él corre 25% más rápido que German. La cantidad de vueltas que habrá dado Leonardo cuando alcance por primera vez a German es

(a) 3

(b) 4

(c) 5

(d) 6

1.2.10 Juan Pablo escribe la siguiente sucesión de números:

$$999998, \quad 9999998, \quad 99999998, \quad \ldots \quad , \quad \underbrace{999\cdots98}_{\text{2018 veces}}$$

Luego suma todos los números en la sucesión y a este número le llama S; es decir:

$$S = 999998 + 9999998 + 99999998 + \cdots + \underbrace{999\cdots98}_{\text{2018 veces}}$$

La suma de los dígitos de S es

(a) 2014

(b) 2018

(c) 2025

(d) 2054

1.2.3 Geometría

Ejemplo 1.17

Considere el $\triangle ABC$ recto en B, y sea D un punto, tal que $A-D-C$ y $\overline{BD} \perp \overline{AC}$. Si $\dfrac{CD}{AD} = \dfrac{3}{7}$, la razón entre las áreas de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle ADB$ es

(a) $\dfrac{7}{3}$

(b) $\dfrac{3}{7}$

(c) $\dfrac{10}{3}$

(d) $\dfrac{10}{7}$

Solución:
$\overline{BD}$ es la altura de $\triangle ABC$ (sobre la hipotenusa) y del $\triangle ADB$ (sobre el cateto $\overline{AD}$); así, se tiene que (d) es la respuesta correcta, ya que:

$$\frac{(ABC)}{(ADB)} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot BD}{\frac{1}{2}AD \cdot BD} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD + CD}{AD} = 1 + \frac{CD}{AD} = 1 + \frac{3}{7} = \frac{10}{7}$$

Ejemplo 1.18

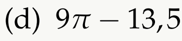
De acuerdo con la información de la figura adjunta, el área de la región que está dentro de la circunferencia pero fuera del polígono es

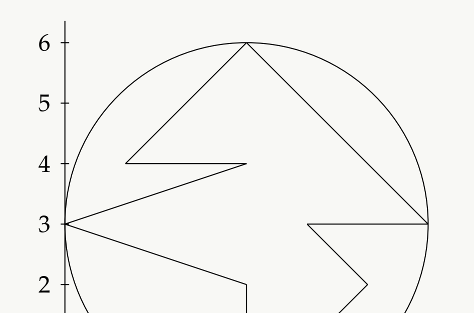
(a) $9\pi - 12$

(b) $9\pi - 13$

(c) $9\pi - 12{,}5$

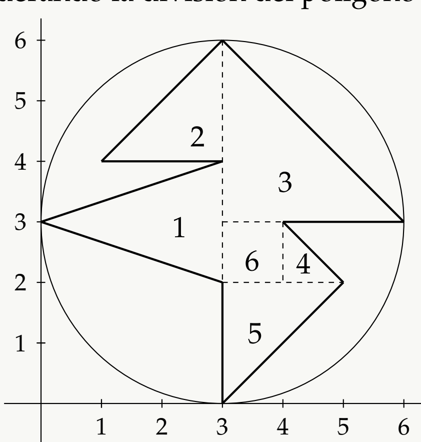
(d) $9\pi - 13{,}5$





Solución:

Considerando la división del polígono que se muestra en la figura, se tiene:



$A_1 = \dfrac{2\cdot 3}{2} = 3$

$A_2 = \dfrac{2\cdot 2}{2} = 2$

$A_3 = \dfrac{3\cdot 3}{2} = 4{,}5$

$A_4 = \dfrac{1\cdot 1}{2} = 0{,}5$

$A_5 = \dfrac{2\cdot 2}{2} = 2$

$A_6 = 1$

$A_p = 13$

Por lo que el área pedida es $9\pi - 13$.

1.2.11 Considere el triángulo rectángulo $\triangle ABC$, recto en B. Sea M un punto sobre $\overline{BC}$, $B - M - C$, con $\overline{AM}$ bisectriz de $\angle BAC$. Si $m\angle AMC = 115^\circ$, entonces la medida de $\angle MCA$ es

(a) 25°

(b) 40°

(c) 65°

(d) 115°

Ejemplo 1.19

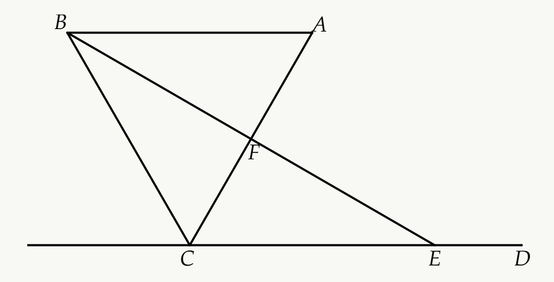
En la figura adjunta, $\triangle ABC$ es equilátero, $C-E-D$, $\overleftrightarrow{CD} \parallel \overline{AB}$, $\overline{BE}$ es mediatriz de $\overline{AC}$ y F es el punto de intersección de $\overline{AC}$ con $\overline{BE}$.
Si el área de $\triangle CFE = 2\sqrt{3}$ cm^2, entonces el perímetro, en cm, de $\triangle ABC$ es

(a) 12

(b) 24

(c) $2\sqrt{3}$

(d) $6\sqrt{3}$



Solución:
Como el triángulo ABC es equilátero, $\overline{BF}$ es, además de una de sus mediatrices, una mediana, una bisectriz y una altura, por lo que los triángulos $\triangle ABF$ y $\triangle CBF$ son congruentes.

Como $\overline{AB} \parallel \overline{CE}$, por ángulos entre paralelas se tiene que $\angle ACE \cong \angle CAB$ y $\angle ABE \cong \angle CEB$.

Además, por ser opuestos por el vértice, $\angle AFB \cong \angle CFE$ y se cumple que $AF = CF$, pues $\overline{BE}$ es mediatriz de $\overline{AC}$. De esta manera, $\triangle ABF \cong \triangle CEF$.

Luego, $(CFE) = 2\sqrt{3} = (ABF)$. De esta manera, $(ABC) = 2 \cdot (ABF) = 4\sqrt{3}$.

Así, $\dfrac{(BA)^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \Rightarrow (BA)^2 = 16 \Rightarrow BA = 4$ y el perímetro de $\triangle ABC = 4 \cdot 3 = 12$ cm.

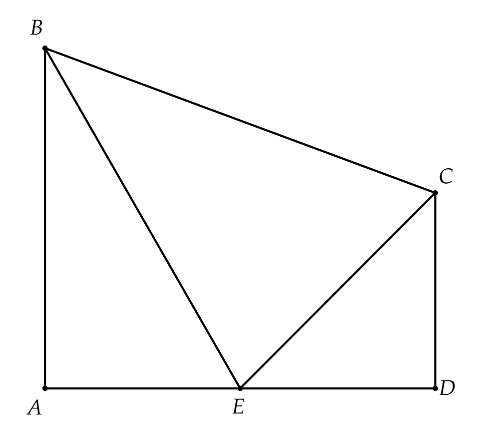
1.2.12 Considere la figura adjunta. Si E es el punto medio de $\overline{AD}$, $m\angle BAD = m\angle CDA = 90°$, $AD = AB = x$ y $\triangle EDC$ es isósceles, entonces el área de $\triangle EBC$ es

(a) $\dfrac{5x^2}{8}$

(b) $\dfrac{5x^2}{4}$

(c) $\dfrac{3x^2}{8}$

(d) $\dfrac{x^2}{8}$



Ejemplo 1.20

Considere los puntos A, B, P y Q tales que $\overline{AB} \parallel \overline{PQ}$, $\overline{AP} \perp \overline{BA}$. Si además se cumple que $PQ = \dfrac{AB}{3}$ y que $AP = AB$, entonces la razón entre las áreas de los triángulos $\triangle ABP$ y $\triangle BPQ$ es

(a) $\dfrac{1}{3}$

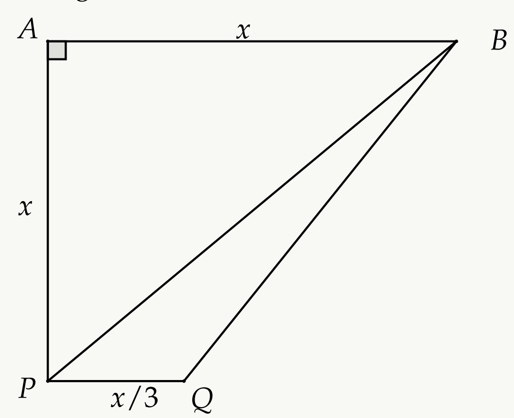
(b) 1

(c) $\dfrac{3}{2}$

(d) 3

Solución:

De acuerdo con la información dada, se tiene la siguiente figura:



Entonces, $\dfrac{(ABP)}{(BPQ)} = \dfrac{\dfrac{x \cdot x}{2}}{\dfrac{x/3 \cdot x}{2}} = \dfrac{\dfrac{x^2}{2}}{\dfrac{x^2}{6}} = 3.$

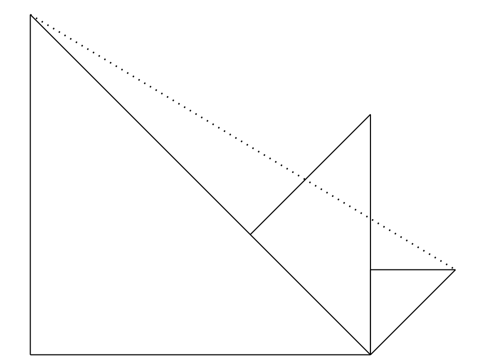
1.2.13 En la figura adjunta se presentan tres triángulos rectángulos isósceles, donde la hipotenusa del mediano mide la mitad de la hipotenusa del grande, y la del pequeño la mitad de la del mediano. Si un cateto del triángulo grande mide 1 cm, entonces la longitud de la línea punteada es

(a) $\dfrac{\sqrt{34}}{4}$

(b) $\dfrac{\sqrt{17}}{4}$

(c) $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$

(d) $\dfrac{\sqrt{34}}{2}$



1.2.4 Álgebra

Ejemplo 1.21

Sean a, b y c números enteros positivos, tales que $a^2b = 28$, $b^2c = 147$ y $c^2a = 18$. El valor de abc es

(a) 14

(b) 21

(c) 28

(d) 42

Solución:
Observe que $a^2bb^2cc^2a = a^3b^3c^3 = 28 \cdot 147 \cdot 18 = 2^2 \cdot 7 \cdot 7^2 \cdot 3 \cdot 3^2 \cdot 2 = 2^3 \cdot 7^3 \cdot 3^3$, como a, b y c son positivos, entonces debe cumplirse que $abc = 2 \cdot 7 \cdot 3 = 42$.

1.2.14 El resultado de la operación $\dfrac{2018 \cdot 2{,}018}{20{,}18 \cdot 201{,}8}$ es

(a) $0{,}1$

(b) 1

(c) 10

(d) 100

1.2.15 Christian, Alexander y Leonel tienen entre los tres 435 monedas de 100 colones. Christian gasta la mitad de sus monedas, Alexander gasta la tercera parte de sus monedas y Leonel la cuarta parte de sus monedas. Ahora los tres tienen la misma cantidad de monedas. Entonces, la cantidad de monedas que tenía inicialmente Alexander es

(a) 120

(b) 135

(c) 180

(d) 220

1.3 Nivel III

1.3.1 Razonamiento Lógico y Probabilidad

Ejemplo 1.22

Un docente de Matemáticas que vive en San José debe trasladarse hacia Golfito a impartir un curso de lógica mientras que otro profesor de Golfito viaja a San José a recibir una capacitación el mismo día. Parten a la misma hora hacia el lugar de destino y viajan a una velocidad constante. Si ambos se cruzan en el camino exactamente a la 1 pm, el primero llega a su destino a las 3 pm mientras que el segundo llega a las 9 pm, la hora a la que salieron es

(a) 6 am

(b) 7 am

(c) 8 am

(d) 9 am

Solución:
Si partieron a x horas y se encuentran a la 1pm en un determinado punto entonces la primer persona duró $13 - x$ en recorrer dicha distancia mientras que el segundo lo hizo en 8 horas.

La otra parte del trayecto el primero lo hace en 2 horas mientras que el segundo lo hace en $13 - x$. Así, $\dfrac{13-x}{8} = \dfrac{2}{13-x}$, resolviendo la ecuación se obtiene que $x = 9$. Por lo tanto, la hora de salida fue a las 9 am.

1.3.1 En la cima de la Torre Karim hay una habitación especial en la que el tiempo transcurre de tal forma que si una persona está en su interior durante un año, en el exterior habrá pasado solamente un día. Olcoman tenía mucho sueño, pero no quería perder tiempo para estudiar para el examen de Olimpiadas, entonces entró en la habitación y durmió ocho horas. El tiempo aproximado que transcurrió afuera es

(a) 0,5 horas

(b) 0,5 minutos

(c) 1,3 minutos

(d) 1,3 segundos

Ejemplo 1.23

A Alberto, con un motor viejo, le toma seis horas llenar una piscina de agua. A Bryan, con un motor más grande, le toma cuatro horas llenar la misma piscina. A Carlos, con un motor más moderno, le toma el mismo tiempo que le tomaría a Alberto y a Bryan si lo hacen juntos. Siempre que se llena la piscina se hace a un ritmo constante. La fracción de la piscina que podrían llenar los tres trabajando juntos en una hora es

(a) $\frac{2}{3}$

(b) $\frac{3}{4}$

(c) $\frac{5}{6}$

(d) $\frac{7}{8}$

Solución:
Alberto llena en x horas $\frac{x}{6}$ partes de la piscina, y Bryan $\frac{x}{4}$ partes, entonces $\frac{x}{6}+\frac{x}{4}=1 \Rightarrow x=\frac{12}{5}$, es el tiempo en que llenarían entre los 2 la piscina. Y eso es lo que le tomaría en horas a Carlos llenar la piscina.
Entre los tres, en x horas llenarían $\frac{x}{6}+\frac{x}{4}+\frac{5x}{12}$ partes de la piscina. En una hora sería $\frac{20}{24}=\frac{5}{6}$ partes del volumen de la piscina.

1.3.2 Si en una tanda de penales 32 % fueron atajados por el portero, 30 % fueron lanzados fuera de la portería o impactados en el marco (sin ser anotación), y el resto fueron anotados, la mínima cantidad de penales que pudieron haber sido lanzados es

(a) 25

(b) 50

(c) 62

(d) 100

1.3.2 Teoría de Números

Ejemplo 1.24

La suma de los dígitos del número entero positivo n que cumple que $n+1$ y $\dfrac{n}{8}+34$ son cubos perfectos es

(a) 17

(b) 18

(c) 19

(d) 20

Solución:
Si $n+1=x^3$ y $\frac{n}{8}+34=y^3$ entonces $271=8y^3-x^3=(2y-x)\left(4y^2+2yx+x^2\right)$.
Como 271 es primo, se tiene que $2y-x=1$, de donde $(x+1)^2+(x+1)x+x^2=271 \Rightarrow x^2+x-90=0 \Rightarrow (x+10)(x-9)=0$, por lo que $x=9$.
Así, $n=728$ y la suma de sus dígitos es 17.

Ejemplo 1.25

La cantidad de números de cuatro cifras que son cuadrados perfectos y múltiplos de cinco o seis es

(a) 20

(b) 22

(c) 24

(d) 26

Solución:
Los cuadrados perfectos de cuatro cifras corresponden a los cuadrados desde 32^2 hasta 99^2, puesto que $31^2=961$ y $100^2=10000$.
Para que sean múltiplos de 6, sus bases deben serlo y se tiene un total de 11 múltiplos de 6 desde 36 hasta 96.
Por otra parte, se tienen 13 múltiplos de 5 desde 35 hasta 95 y esto daría un total de 24 números, pero se deben restar los que son múltipos de ambos, que son únicamente 2 (múltiplos de 30).
Por lo tanto hay 22 números que cumplen lo pedido.

Ejemplo 1.26

La cantidad de números positivos con todos sus dígitos pares distintos que pueden formarse, de tal manera que sean divisibles por 3, 5 y 7 es

(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3

Solución:
Los dígitos del número deben ser tomados del conjunto $\{0,2,4,6,8\}$.

Para que el número sea divisible por 5, debe terminar en 0. Para que sea divisible por 3, sus dígitos deben sumar un número múltiplo de 3. Si se toman dos dígitos el único posible es 60 pero no es múltiplo de 7. Con tres dígitos se tiene $0+2+4=6$ y $0+4+8=12$, de donde se tienen 420 y 840 múltiplos de 7. Si se toman todos los dígitos $0+2+4+6+8=20$ no es múltiplo de 3.

Si se toman cuatro dígitos los únicos cuya suma es múltiplo de 3 son $0+2+4+6=12$ y $0+4+6+8=18$. Para saber si un número terminado en 0 es divisible por 7, basta con revisar si el número sin su último dígito 0 lo es. Del conjunto $\{2,4,6\}$ todos los números que se pueden formar son 246, 264, 426, 462, 624, 642, de los cuales solamente 462 es divisible por 7. Del conjunto $\{4,6,8\}$ todos los números que se pueden formar son 468, 486, 648, 684, 846, 864 de los cuales ninguno es divisible por 7.

Por lo tanto, los únicos que cumplen lo pedido son 420, 840 y 4620.

1.3.3 Juan tiene un tablero de 4×4 y desea marcar ocho de las 16 casillas, de tal manera que cada fila y cada columna contengan exactamente dos casillas marcadas. La cantidad de maneras en que Juan puede hacerlo es

(a) 128

(b) 90

(c) 45

(d) 32

Ejemplo 1.27

Se enumeran en una lista los números del 1 al 488. La diferencia entre la cantidad de veces que aparece el número 4 y la cantidad de veces que aparece el número 9 corresponde a

(a) 89

(b) 90

(c) 99

(d) 100

Solución:
Escribimos los números como $\{001, 002, 003, \ldots, 488\}$.
El número de 4's que aparecen como primer dígito es 89. El número de 4's que aparecen como segundo dígito es 50. El número de 4's que aparecen como tercer dígito es 49. En total, aparecen 188 4's.
El número de 9's que aparecen como primer dígito es 0. El número de 9's que aparecen como segundo dígito es 40. El número de 9's que aparecen como tercer dígito es 48. En total, aparecen 88 9's.
La diferencia es 100.

1.3.4 La cantidad de maneras en las que un cartero puede entregar siete cartas distintas a siete personas, de manera que exactamente tres de ellas reciban una carta incorrecta es

(a) 84

(b) 70

(c) 49

(d) 35

1.3.5 Si n y m son números naturales tales que $\dfrac{1280}{m\,(n+1)} = n^n$, entonces el valor de m es

(a) 1

(b) 2

(c) 4

(d) 5

Ejemplo 1.28

Alicia escribe una ecuación en la pizarra, diciendo que tiene soluciones en los números enteros positivos: $m\left(m^k - m \cdot k + m^2 + 1\right) = 2018$. Con certeza se cumple que

(a) $k = 2$

(b) $k = 10$

(c) $m = 3$

(d) $m = 10$

Solución:

Como $2018 = 2 \times 1009$, donde ambos números son primos, las únicas formas de descomponer 2018 son $2018 = 1 \cdot 2018 = 2 \cdot 1009$ y se deduce que $m \in \{1,2,1009,2018\}$. En los últimos dos casos no habría solución entera. Si $m = 1$ se tiene $m^k - m \cdot k + m^2 + 1 = 1^k - 1 \cdot k + 1^2 + 1 = 3 - k = 2018$, de donde $k = -2015$. Si $m = 2$, entonces $m^k - m \cdot k + m^2 + 1 = 2^k - 2 \cdot k + 2^2 + 1 = 2^k - 2k + 5 = 1009$; es decir, $2^k - 2k = 1004$, de donde $k = 10$.

1.3.3 Geometría y Trigonometría

Ejemplo 1.29

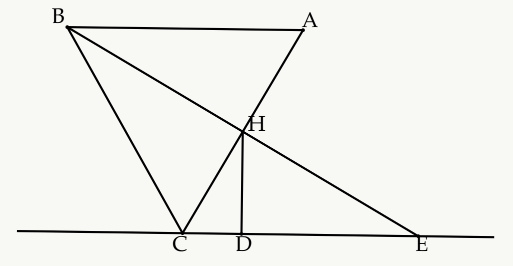
En la figura adjunta, el $\triangle ABC$ es equilátero, D está en $\overleftrightarrow{CE}$ que es paralela al $\overline{AB}$, y $\overline{BE}$ divide al $\angle CBA$ en dos ángulos de igual medida. Si H es el punto donde se cortan $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$, $HD = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ es la medida de una altura del $\triangle CHE$ y $DC = \dfrac{3}{2}$, entonces el área del $\triangle ABC$ es

(a) $3\sqrt{3}$

(b) $5\sqrt{3}$

(c) $6\sqrt{3}$

(d) $9\sqrt{3}$



Solución:

En el $\triangle CDH$ y usando el teorema de Pitágoras se tiene que $CH^2 = CD^2 + DH^2 \Rightarrow CH = \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 3$. Como $\triangle ABC$ es equilátero y $\overline{BE}$ biseca al $\angle CBA$, $\overline{BH}$ es altura de dicho triángulo y mediatriz. Luego $AH = CH = 3$, por lo que cada uno de los lados del $\triangle ABC$ mide 6. El área de este triángulo es $\dfrac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = 9\sqrt{3}$.

Ejemplo 1.30

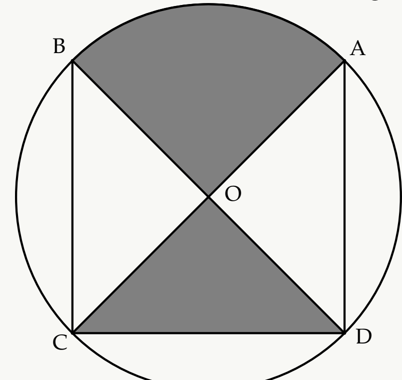
En la figura adjunta, las diagonales del cuadrado $\square ABCD$ se intersecan en el punto O. Si el área del círculo de radio $\overline{OD}$ es 18π cm^2, entonces el área de la región sombreada, en cm^2, es

(a) $9+\dfrac{9\pi}{2}$

(b) $\dfrac{9}{2}+9\pi$

(c) $\dfrac{9}{4}+\dfrac{9\pi}{2}$

(d) $\dfrac{9}{4}+9\pi$



Solución:

El área de la región sombreada es la cuarta parte del área del círculo sumada con la cuarta parte del área del cuadrado.

Sea $r=\overline{OD}$ es el radio del círculo, como el área del círculo es 18π se tiene que $\pi r^2=18\pi \Rightarrow r=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$. De esta manera, $BD=2r=6\sqrt{2}$, por lo que $CD=6$ y el área del cuadrado es 36. El área de la región sombreada es $\dfrac{18\pi}{4}+\dfrac{36}{4}=\dfrac{9\pi}{2}+9$.

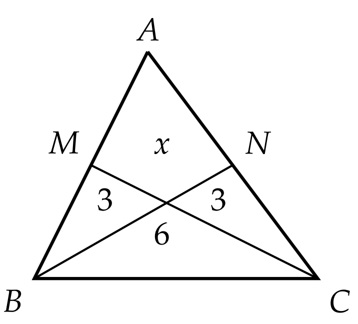
1.3.6 En la figura adjunta, M y N son los puntos medios de los lados correspondientes del triángulo que se muestra. Si 3, 3 y 6 corresponden, respectivamente, al área de cada triángulo, el área del cuadrilátero donde se encuentra x es

(a) 4

(b) 5

(c) 6

(d) 7



Ejemplo 1.31

En un triángulo rectángulo la medida de un cateto es dos tercios de la medida del otro cateto. El seno del ángulo agudo de mayor medida es

(a) $\dfrac{\sqrt{13}}{13}$

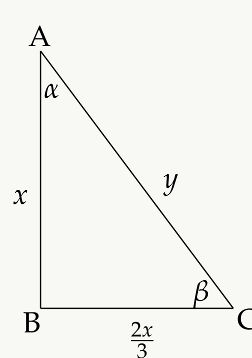
(b) $\dfrac{3\sqrt{3}}{13}$

(c) $\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$

(d) $\dfrac{13\sqrt{3}}{3}$

Solución:

Considere la figura adjunta. Como $x > \dfrac{2x}{3}$ entonces se tiene que $\alpha < \beta$, por lo que para poder calcular el seno se debe obtener el valor de y en términos de x, así:



$$y^2 = \left(\frac{2x}{3}\right)^2 + x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{4x^2}{9} + x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{13x^2}{9}$$

$$\Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{13x^2}{9}} \Rightarrow y = \pm\frac{x}{3}\sqrt{13}$$

Por lo tanto, al aplicar la fórmula del seno, se obtiene:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{x}{\frac{x}{3}\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

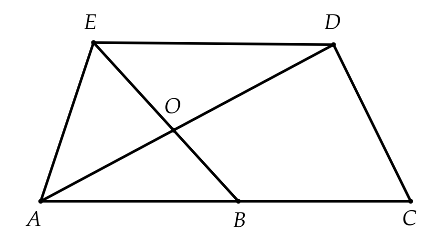
1.3.7 En la figura adjunta el $\square ACDE$ es un trapecio tal que $ED = 15$, $AC = 24$ y la altura del trapecio es 12. Si B es el punto medio $\overline{AC}$, el área del $\square OBCD$ es

(a) 78

(b) 112

(c) 122

(d) 234



Ejemplo 1.32

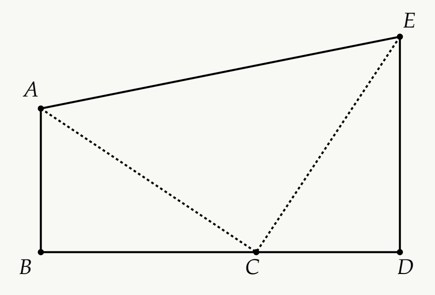
En la figura adjunta $\square ABDE$ es un trapecio rectángulo con ángulos rectos en B y D. Si $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{DE}{BC} = \dfrac{4}{3}$, $\angle CED \cong \angle BCA$ y $BD = 6$, AE es

(a) $\dfrac{20}{3}$

(b) $\dfrac{25}{4}$

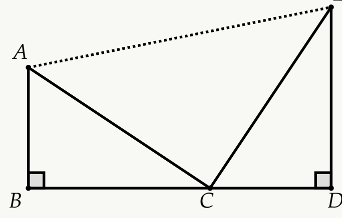
(c) $\dfrac{27}{4}$

(d) $\dfrac{31}{5}$



Solución:

Como $m\angle CED + m\angle DCE = 90°$, entonces $m\angle BCA + m\angle DCE = 90°$ y así $m\angle ACE = 90°$.
Por otro lado, como $m\angle BCA + m\angle CAB = 90°$ y $m\angle BCA + m\angle DCE = 90°$, entonces $m\angle CAB = m\angle DCE$ y de esta forma $\triangle ABC \sim \triangle CDE$ (a-a).



De la semenjaza anterior y de los datos en el enunciado se tiene $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{DE}{CD} = \dfrac{4}{3} = \dfrac{DE}{BC}$ y así $BC = CD = 3$.
De la igualdad anterior y utilizando una de las hipótesis suministradas, se tiene que $\dfrac{BC}{AB} = \dfrac{4}{3} \Rightarrow \dfrac{9}{4} = AB$, por lo que $AC^2 = \left(\dfrac{9}{4}\right)^2 + 3^2$ y de ahí $AC = \dfrac{15}{4}$.
Ahora como $\dfrac{DE}{CD} = \dfrac{4}{3}$ entonces $DE = 4$ y así $CE = 5$

Finalmente aplicando Pitágoras en el $\triangle ACE$ tenemos que $AE^2 = \left(\dfrac{15}{4}\right) + 5^2$ y de ahí $AE = \dfrac{25}{4}$.

1.3.8 Considere el $\triangle ABC$, con D en $\overline{BC}$, y sea $\overline{AD}$ bisectriz del $\angle BAC$. La perpendicular a $\overline{BC}$ por D corta a $\overline{AC}$ en E. Si $AE = ED = \dfrac{EC}{3}$ y $AD = \sqrt{3}$, entonces el área del $\triangle ABC$ es

(a) $2\sqrt{2}$

(b) $2\sqrt{3}$

(c) $3\sqrt{2}$

(d) $3\sqrt{3}$

1.3.4 Álgebra

Ejemplo 1.33

Si se suman los dígitos de un número entero positivo n de siete dígitos el resultado es seis. El producto de los dígitos de n es

(a) 0

(b) 5

(c) 6

(d) 12

Solución:
Si d_i es el i-ésimo dígito, entonces es un entero no negativo menor o igual a 9.
Dado que $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6 + d_7 = 6$, entonces al menos uno de esos dígitos es 0 y, por lo tanto, el producto sería 0.

Ejemplo 1.34

Considere la ecuación cuadrática $x^2 + 2x - n = 0$, con $1 < n < 100$. La cantidad de enteros n en la cual la ecuación dada posee dos soluciones racionales distintas es

(a) 0

(b) 7

(c) 8

(d) 9

Solución:
$\Delta = (2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot -n = 4n + 4$, luego las soluciones de la ecuación están dadas por:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4n+4}}{2} = -1 \pm \sqrt{n+1}$$

Como las soluciones son racionales, entonces $\sqrt{n+1}$ debe ser una raíz exacta; es decir $n+1$ debe ser un número cuadrado perfecto. Por lo tanto, $n = \{3,8,15,24,35,48,63,80,99\}$ y la opción correcta es la (d).

1.3.9 Si se sabe que a y b son constantes reales, el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x - y = b \\ ax + y = 0 \end{cases}$ posee una única solución si

(a) $a \neq 1$ y $b \in \mathbb{R}$

(b) $a \neq 1$ y $b = 0$

(c) $a \neq -1$ y $b \in \mathbb{R}$

(d) $a = -1$ y $b \neq 0$

Ejemplo 1.35

Sean a y b dos números reales positivos. Si $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = 4$, entonces el valor de $\dfrac{a+b}{a-b}$ es

(a) 2

(b) 4

(c) $\sqrt{2}$

(d) $\sqrt{3}$

Solución:
Observe que

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 4 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a^2 + b^2}{ab} = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 = 4ab \end{aligned}$$

Sumando $2ab$ se obtiene que $(a+b)^2 = 6ab$, y restando $2ab$ se obtiene que $(a-b)^2 = 2ab$, Luego

$$\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} = \frac{6ab}{2ab} = 3$$

Por lo tanto, $\dfrac{a+b}{a-b} = \sqrt{3}$.

Ejemplo 1.36

Considere la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(n) = \left\lfloor \frac{4039n}{2018} \right\rfloor$$

donde $\lfloor x \rfloor$ representa la parte entera de x; por ejemplo, $\lfloor 0.5 \rfloor = 0$, $\lfloor 1.4 \rfloor = 1$, $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$ y $\lfloor \pi \rfloor = 3$. El resultado de $f(1) + f(2) + \cdots + f(675)$ es

(a) 456 300

(b) 456 301

(c) 456 302

(d) 456 303

Solución:
Observe que $4039 = 2 \cdot 2018 + 3$, luego

$$f(n) = \left\lfloor \frac{4039n}{2018} \right\rfloor = \left\lfloor 2n + \frac{3n}{2018} \right\rfloor = 2n + \left\lfloor \frac{3n}{2018} \right\rfloor$$

Por otro lado, se tiene que $3 \cdot 672 = 2016$. Por lo que $\left\lfloor \frac{3n}{2018} \right\rfloor = 0$ para $1 \leq n \leq 672$, y $\left\lfloor \frac{3n}{2018} \right\rfloor = 1$ para $673 \leq n \leq 675$.

Así, $f(1) + f(2) + \cdots + f(675) = 2(1 + 2 + \cdots + 675) + 1 + 1 + 1 = 675 \cdot 676 + 3 = 456303$.

1.3.10 Si a y b son números reales positivos que cumplen $x^3y^4 = a$ y $x^5y^6 = b$, entonces x es

(a) $\dfrac{b^2}{a^3}$

(b) $\dfrac{b}{a}$

(c) $\sqrt{\dfrac{a^5}{b^3}}$

(d) $\sqrt{\dfrac{b}{a}}$

Capítulo 2

II Eliminatoria

2.1 Nivel I

2.1.1 Razonamiento Lógico y Probabilidad

Ejemplo 2.1

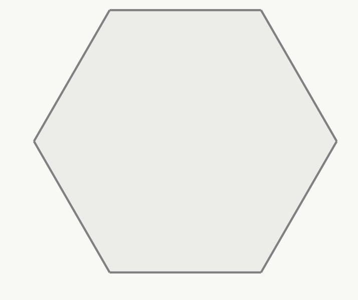
Considere la figura adjunta, en la que cada uno de sus lados mide dos unidades. Si se escogen siete puntos cualesquiera en el interior de la figura, se cumple con certeza que dos de los puntos dados están a una distancia

(a) menor de dos unidades

(b) mayor de dos unidades pero menor de tres unidades

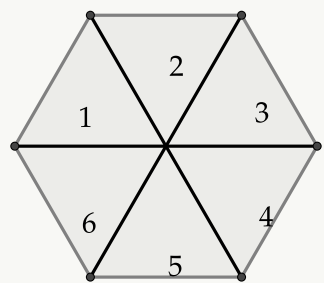
(c) mayor de tres unidades pero menor de cuatro unidades

(d) mayor de cuatro unidades



Solución:

Divida la región en seis triángulos equiláteros, como se muestra en la siguiente figura:



Si se escogen siete puntos en la región, se puede asignar cada uno de ellos a un triángulo que lo contenga. Si el punto pertenece a varios triángulos, asígnelo arbitrariamente a uno de ellos. Entonces los siete puntos están asignados a seis regiones triangulares, de modo que por el principio de las casillas por lo menos dos puntos pertencen a uno de los triángulos. Entre estos dos puntos no puede haber una distancia mayor a dos unidades.

2.1.1 Se elige un entero n al azar, tal que $1000 \leq n \leq 9999$. La probabilidad de que el producto de las cifras de n sea múltiplo de 3 corresponde a

(a) $\dfrac{118}{125}$

(b) $\dfrac{107}{125}$

(c) $\dfrac{18}{125}$

(d) $\dfrac{7}{125}$

Ejemplo 2.2

Ana, Beatriz y Carlos van al mismo colegio, el cual tiene 793 estudiantes distribuidos en la totalidad de aulas de la institución. En el colegio se sabe que por cada 23 personas que se reúnen en los recreos, hay dos de la misma aula.
Ana afirma que hay por lo menos un aula en la que hay al menos 19 estudiantes del mismo género, Carlos dice que hay a lo sumo 19 y Beatriz dice que hay al menos 20. Se puede asegurar que

(a) Ana tiene razón

(b) Beatriz tiene razón

(c) Carlos tiene razón

(d) Ninguno tiene razón

Solución:
Como en cada grupo de 23 personas siempre hay 2 de la misma sección, eso significa que no puede haber más de 22 secciones.
Ahora, como $793 = 36 \cdot 22 + 1$, se tiene que al menos una sección tendrá 37 estudiantes o más (no puede suceder que las 22 secciones tengan menos de 37).
Como $37 = 18 \cdot 2 + 1$ significa que al menos hay 19 personas del mismo género y en, por lo menos, una misma sección.
Por lo tanto, Ana tiene razón.

2.1.2 Teoría de Números

Ejemplo 2.3

Si a, b y c son dígitos, la cantidad total de números múltiplos de seis de la forma $4a5bc$ corresponde a

(a) 161

(b) 163

(c) 165

(d) 167

Solución:
Note que c tiene que ser un número par, que $4+5=9$, y que del 0 al 9 hay 4 números de la forma $3k$, 3 de la forma $3k+1$ y otros 3 de la forma $3k+2$.
Si c es 0 o 6, entonces $a+b=3k$ por lo que hay $2\cdot(4\cdot4+2\cdot3\cdot3)=68$ opciones.
Si c es 2 u 8, entonces $a+b=3k+1$ por lo que hay $2\cdot(3\cdot3+2\cdot3\cdot4)=66$ opciones.
Si c es 4, entonces $a+b=3k+2$ por lo que hay $1\cdot(3\cdot3+2\cdot3\cdot4)=33$ opciones.
En total, $68+66+33=167$ números múltiplos de seis de la forma indicada.

N Problema de desarrollo
El siguiente ejercicio propuesto es uno de los tres problemas de desarrollo que formaron parte de esta prueba.

2.1.2 Verónica, Ana y Gabriela situadas en una ronda se divierten con el siguiente juego: una de ellas elige un número y lo dice en voz alta; la que está a su izquierda divide el número dicho entre su mayor divisor primo y dice el resultado en voz alta; la que está a su izquierda divide este último número entre su mayor divisor primo y dice el resultado en voz alta, y así sucesivamente. Ganará aquella que deba decir en voz alta el número 1, momento en que el juego termina.
Ana eligió un número mayor que 50 y menor que 100 y ganó.
Verónica eligió el número consecutivo posterior del que escogió Ana, y ¡Verónica también ganó!
Determine todos los números que pudo haber elegido Ana.

Ejemplo 2.4

La cantidad de números primos de tres cifras que existen, tales que al suprimirle la cifra de las centenas el número resultante es un cuadrado perfecto de dos cifras corresponde a

(a) 5

(b) 6

(c) 7

(d) 8

Solución:
Para ser cuadrado perfecto el número deberá terminar en 16, 25, 36, 49, 64 y 81, pero solamente podrán ser primos los terminados en 49 y 81. Así, se tendrá una lista de 18 números.

149	181
249	281
349	381
449	481
549	581
649	681
749	781
849	881
949	981

Aplicando las reglas de divisibilidad se obtiene que solamente los números 149, 181, 281, 349, 449 y 881 son primos.

Ejemplo 2.5

La suma de todos los enteros positivos menores que 100 y que tienen exactamente tres divisores positivos diferentes corresponde a

(a) 87

(b) 88

(c) 176

(d) 177

Solución:
Si un número tiene solo tres divisores, entonces debe ser el cuadrado de un número primo; así, se tiene que: $S = 4 + 9 + 25 + 49 = 87$.

(N) Problema de desarrollo
El siguiente ejemplo resuelto es uno de los tres problemas de desarrollo que formaron parte de esta prueba.

Ejemplo 2.6

Determine todos los números naturales N de dos dígitos, tales que N equivale a siete veces la suma de sus dígitos.

Solución:
Sean a y b los dígitos y N el número, tal que $N = ab$.
Utilizando notación desarrollada se tiene que $N = 10a + b$.

$$\begin{aligned} 10a + b &= 7(a+b) \\ 10a + b &= 7a + 7b \\ 3a &= 6b \\ a &= 2b \end{aligned}$$

Lo cual significa que a es un número par. Así:
Si $a = 2 \Rightarrow b = 1$; si $a = 4 \Rightarrow b = 2$; si $a = 6 \Rightarrow b = 3$; y si $a = 8 \Rightarrow b = 4$.
Entonces, los números que cumplen dicha característica son 21, 42, 63 y 84.

2.1.3 Un faro emite tres colores distintos:

- Rojo cada 16 segundos
- Verde cada 45 segundos
- Blanco cada 2 minutos y 20 segundos

Los tres colores son emitidos simultáneamente a media noche. La frecuencia con que son emitidos simultáneamente los colores rojo y blanco corresponde a

(a) 720 segundos

(b) 21 minutos

(c) 9 minutos y 20 segundos

(d) 1 hora y 24 minutos

2.1.3 Geometría

Ejemplo 2.7

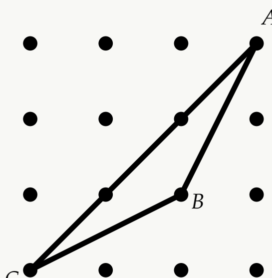
En la figura adjunta, las distancias horizontales y verticales entre puntos consecutivos son iguales a 1 cm. El área, en cm^2, del triángulo ABC corresponde a

(a) 3

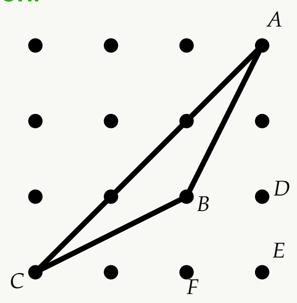
(b) 4

(c) 1,5

(d) 4,5



Solución:



$$
\begin{aligned}
(AEC) &= (ABC) + (CBF) + (ABD) + (BDEF) \\
4{,}5 &= (ABC) + 1 + 1 + 1 \\
1{,}5 &= (ABC)
\end{aligned}
$$

2.1.4 Un rectángulo mide 192×84. Se corta el cuadrado de mayor tamaño que se pueda del rectángulo con un solo corte. Si ambas piezas resultantes son cuadrados, el proceso termina, sino se repite el proceso recortando el rectángulo no cuadrado. La cantidad de piezas que resultan al final del proceso corresponde a

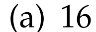
(a) 6

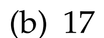
(b) 7

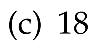
(c) 8

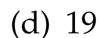
(d) 9

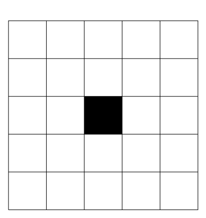
2.1.5 En la figura adjunta, se ha creado un cuadrado 5×5 conformado por cuadritos de dimensiones 1×1. La cantidad de cuadrados conformados por cuadritos 1×1 que contienen al cuadrado negro del centro corresponde a


(a) 16


(b) 17


(c) 18


(d) 19



2.1.6 Considere el rectángulo $ABCD$. Sean los puntos E sobre $\overline{AB}$, y F sobre $\overline{AD}$, tales que $A-E-B$ y $A-F-D$, respectivamente. Si $\angle BEC \cong \angle FEC$ y $\angle EFC \cong \angle DFC$, entonces $m\angle BCE + m\angle DCF$ corresponde a

(a) 30°

(b) 45°

(c) 60°

(d) 75°

2.1.7 Considere el $\triangle ABC$ en el que M es el punto medio de $\overline{BC}$, D es un punto en $\overline{AC}$, tal que $\overline{BD} \perp \overline{AC}$, y $DM = MC$. Si $m\angle BAC = 45^\circ$ y $m\angle ACB = 30^\circ$, entonces $m\angle AMB$ corresponde a

(a) 15°

(b) 30°

(c) 45°

(d) 60°

N Problema de desarrollo
El siguiente ejercicio propuesto es uno de los tres problemas de desarrollo que formaron parte de esta prueba.

2.1.8 Las diagonales del cuadrilátero $ABCD$ se intersecan en P y se tiene que $AP = 5$, $BP = 6$, $CP = 10$, $DP = 8$ y $AB = 7$.
Encuentre la razón entre el área del cuadrilátero $ABCD$ y el área del triángulo ABP.

2.2 Nivel II

2.2.1 Razonamiento Lógico y Probabilidad

Ejemplo 2.8

Se escriben en una pizarra los números $2^{-1}, 3^{-1}, 4^{-1}, \cdots, 2017^{-1}, 2018^{-1}$. A continuación, se escogen dos de esos números, llamémoslos a y b, se borran esos dos números seleccionados y se agrega en la lista restante de la pizarra el resultado de la operación $(a-1)(b-1)+1$. Si se continúa con este proceso hasta que se obtenga un único número, entonces ese número resultante corresponde a

(a) $\dfrac{2018^2-1}{2018}$

(b) $\dfrac{2019}{2018}$

(c) $\dfrac{2017}{2018}$

(d) $\dfrac{1}{2018}$

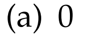
Solución:
Como al escoger a y b se escribe $(a-1)(b-1)+1$ y si en una operación posterior se elige este número con algún otro número c, se deberá escribir el número

$$(((a-1)(b-1)+1)-1)(c-1)+1=(a-1)(b-1)(c-1)+1$$

Por lo tanto, al final el número que queda será el producto de los números que están en la pizarra (que son 2017 números) disminuido en 1, más una unidad; es decir:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{4}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2018}-1\right)+1\\
&=\left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-2}{3}\right)\left(\frac{-3}{4}\right)\cdots\left(\frac{-2017}{2018}\right)+1\\
&=(-1)^{2017}\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2017}{2018}+1\\
&=\frac{-1}{2018}+1=\frac{2017}{2018}
\end{aligned}$$

2.2.1 Hay 10 tarjetas numeradas del 1 al 10. En la figura adjunta se muestran cinco de las tarjetas. Las restantes se quieren emparejar con las que se muestran en dicha figura, de manera que las sumas de las parejas sean 9, 10, 11, 12 y 13 (sin repetir). La cantidad de maneras de realizar las parejas corresponde a

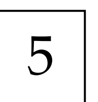


(a) 0

(b) 1

(c) 2

(d) 3



2	3	5
8	9	

Ejemplo 2.9

Luz y María compiten en resolver problemas. A cada una se le entrega la misma lista de 100 problemas. La primera en resolver cualquiera de los problemas recibe cuatro puntos, mientras que la segunda en resolverlo recibe un punto. Si se resolvieron exactamente 60 problemas y juntas obtuvieron 296 puntos en total, entonces la cantidad de problemas resueltos tanto por Luz como por María corresponde a

(a) 53

(b) 54

(c) 55

(d) 56

Solución:
Sean a el número de problemas resueltos por ambas y b el número de problemas que solo resolvió una de las dos.
Luego, $a + b = 60$ y por los puntos se tiene que $5a + 4b = 296$, ya que a cada problema en común se asignaban 4 puntos a la primera en resolverlo y 1 punto a la segunda; es decir, 5 puntos en total. Por otra parte, cada problema que solo una de ellas resolvió recibía 4 puntos.
De lo anterior, $a = 56$ y $b = 4$, por lo que en común resolvieron 56 problemas.

2.2.2 Teoría de Números

Ejemplo 2.10

Considere la secuencia definida como $a_1 = 3$ y $a_{n+1} = a_n(1 + a_n)$, para todo entero $n > 1$. Las últimas dos cifras de a_{2018} corresponden a

(a) 12

(b) 56

(c) 58

(d) 92

Solución:

Con $a_1 = 3$ y $a_{n+1} = a_n(1 + a_n)$, se tienen los primeros términos:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_2 &= 3 \cdot 4 = 12 \\ a_3 &= 12 \cdot 13 = 1\mathbf{56} \\ a_4 &= \mathbf{156} \cdot \mathbf{157} = 24\,4\mathbf{92} = [\,]92 \\ a_5 &= 24\,4\mathbf{92} \cdot 24\,4\mathbf{93} = [\,]92 \cdot [\,]93 = [\,]56 \\ a_6 &= [\,]56 \cdot [\,]57 = [\,]92 \end{aligned}$$

Como 2018 es par, entonces a_{2018} termina en 92.

2.2.2 Se tienen tres números enteros consecutivos a, b y c, tales que $a < b < c$ y dos de ellos son impares. Dado $R = b^2 - c^2 + a^2$, considere las siguientes afirmaciones:

I) Si b es divisible por 3, R es divisible por 12.

II) Si b es divisible por 4, R es divisible por 32.

De las afirmaciones anteriores, son siempre verdaderas

(a) Solamente la I

(b) Solamente la II

(c) Ambas

(d) Ninguna

2.2.3 La cantidad de parejas de números enteros (a,b) que existen, tales que $2a+b$ es una solución de la ecuación $x^2+ax+b=0$, siendo x la variable, corresponde a

(a) 6

(b) 8

(c) 12

(d) 16

N Problema de desarrollo
El siguiente ejemplo resuelto es uno de los tres problemas de desarrollo que formaron parte de esta prueba.

Ejemplo 2.11

Se tiene un cubo de tamaño $10\times10\times10$ donde cada cara está partida en 10×10 cuadrados de mismo tamaño (cada uno de tamaño 1×1). Su superficie es cubierta por 300 tiras de tamaño 2×1, sin que ninguno de los cuadrados 1×1 sea cubierto por dos o más tiras. Se dice que una tira está doblada si no está en solo una cara. Pruebe que el número de tiras dobladas es par.

Solución:
Pinte cada casilla de blanco y negro alternadamente, y de tal forma que las casillas negras y blancas de los bordes sean del mismo color que las casillas de la otra cara con la que comparten lado; así, si una tira está doblada, está sobre dos casillas del mismo color, de lo contrario, no está doblada.
Sean x la cantidad de tiras que cubren dos casillas negras, y la cantidad de tiras que cubren dos casillas blancas, y z la cantidad de tiras que cubren una casilla blanca y una negra. Así, la cantidad de tiras dobladas es $x+y$.
Como hay 300 casillas blancas y 300 casillas negras, se tiene que $2x+z=300$ y $2y+z=300$, restando ambas ecuaciones se tiene que $x-y=0\Rightarrow x+y=2y$, por lo que la cantidad de tiras dobladas es par.

2.2.3 Geometría

Ejemplo 2.12

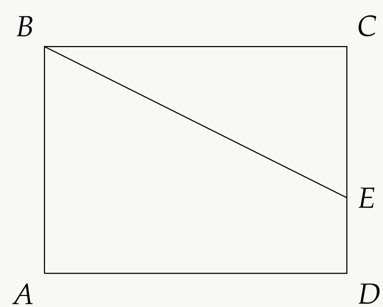
En la figura adjunta, el $\square ABCD$ es un rectángulo, E es un punto sobre $\overline{CD}$, tal que $CE = 2DE$. Si el área del $\triangle BCE$ es 10 cm^2, entonces el área, en cm^2, del $\square ABCD$ corresponde a

(a) 25

(b) 30

(c) 35

(d) 40



Solución:

Recuerde que el área de un triángulo es Área $= \dfrac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$. Luego, se tiene que $\dfrac{CE \cdot BC}{2} = 10$. Ahora, considere el triángulo $\triangle BED$. Si consideramos como base $\overline{ED}$, entonces la altura es $\overline{CB}$, de la condición, $CE = 2DE \rightarrow DE = \dfrac{CE}{2}$, se obtiene que el área del $\triangle BED$ es

$$\frac{DE \cdot BC}{2} = \frac{CE/2 \cdot BC}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{CE \cdot BC}{2} = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

Finalmente, observe que $\triangle BCD \cong \triangle BAD$, luego,

$$(ABCD) = (BCD) + (BAD) = 15 + 15 = 30$$

2.2.4 Sea el $\triangle ABC$ tal que $AB = AC$, y sean D y E puntos en $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, tales que $AD = AE$. Si $m\angle BAD = 30^\circ$, entonces $m\angle EDC$ corresponde a

(a) 10°

(b) 15°

(c) 20°

(d) 25°

Ejemplo 2.13

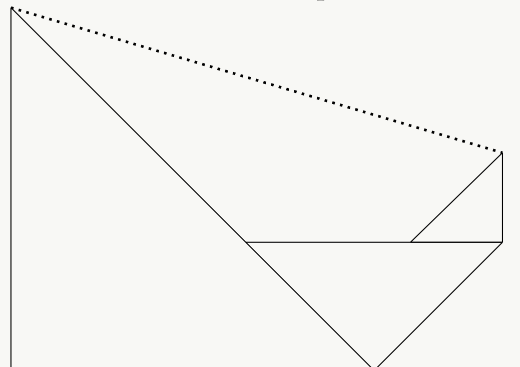
En la figura adjunta se presentan tres triángulos rectángulos isósceles, donde la hipotenusa del triángulo mediano mide la mitad de la medida de la hipotenusa del grande, y la del pequeño la mitad de la medida de la hipotenusa del mediano. Si un cateto del triángulo pequeño mide 1 cm, entonces la longitud, en centímetros, de la línea punteada corresponde a

(a) $\sqrt{29+2\sqrt{2}}$

(b) $\sqrt{25+2\sqrt{2}}$

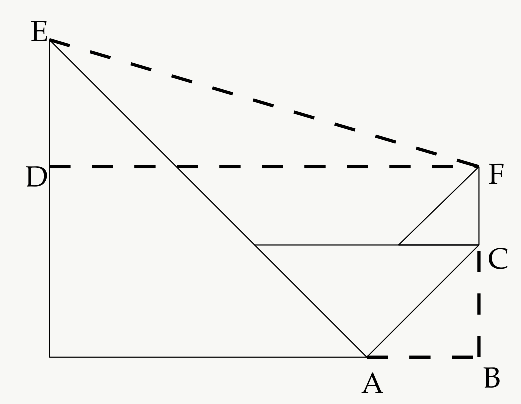
(c) $\sqrt{29+\sqrt{2}}$

(d) $\sqrt{25+\sqrt{2}}$



Solución:

Por semejanza de triángulos, la relación entre las hipotenusas se mantiene entre los catetos, por lo que el cateto del triángulo mediano mide 2 y el del triángulo grande mide 4.



El $\triangle ABC$ es rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide 2 cm, por lo que $AB=\sqrt{2}$; luego $DF=4+\sqrt{2}$ y $BF=1+\sqrt{2}$, por lo que $DE=4-\left(1+\sqrt{2}\right)=3-\sqrt{2}$.

Aplicando el Teorema de Pitágoras en $\triangle DEF$ se tiene que

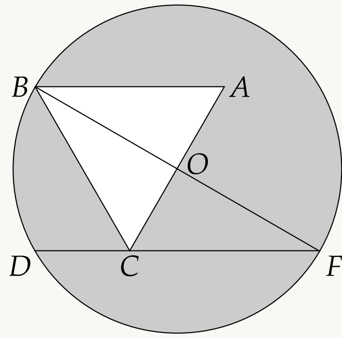
$$EF=\sqrt{\left(3-\sqrt{2}\right)^2+\left(4+\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{29+2\sqrt{2}}$$

(N) Problema de desarrollo
El siguiente ejemplo resuelto es uno de los tres problemas de desarrollo que formaron parte de esta prueba.

Ejemplo 2.14

Considere la figura adjunta, en la que el área del $\triangle ABC = 25\sqrt{3}$ cm^2.

Si se tiene que $\overline{DF} \parallel \overline{AB}$, $B-O-F$, $A-O-C$, $D-C-F$, $\overline{BF}$ es diámetro del círculo, $OA = CO = \dfrac{AB}{2}$ y $\overline{BF}$ biseca al $\angle ABC$, determine el área de la región sombreada.



Solución:

De acuerdo con la información, $\angle ABF \cong \angle BFC$ y $\angle BAC \cong \angle FCA$ por ser ángulos correspondientes entre paralelas, y $\overline{OA} \cong \overline{CO}$; así, $\triangle ABO \cong \triangle CFO$, por lo que $FO = BO = r$ es la medida del radio del círculo y $CF = AB$.

Como $\angle ABF \cong \angle CBF$ y $\angle CFB \cong \angle ABF$, se tiene que $\angle CBF \cong \angle CFB$, por lo que el $\triangle BFC$ es isósceles con $CF = CB = AB$.

Con $AB = CB$ y dado que $AB = AC$, se tiene que el $\triangle ABC$ es equilátero.

Dado que $(ABC) = \dfrac{AC^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3} \Rightarrow AC^2 = 4 \cdot 25 \Rightarrow AC = 10 = AB$. Utilizando el Teorema de Pitágoras en el $\triangle OAB$, se tiene que $AB^2 = OA^2 + OB^2 \Rightarrow 10^2 = 5^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = 75$. El área del círculo es $\pi \cdot r^2 = 75\pi$.

Por lo tanto, el área de la región sombreada en gris es $75\pi - 25\sqrt{3}$ cm^2.

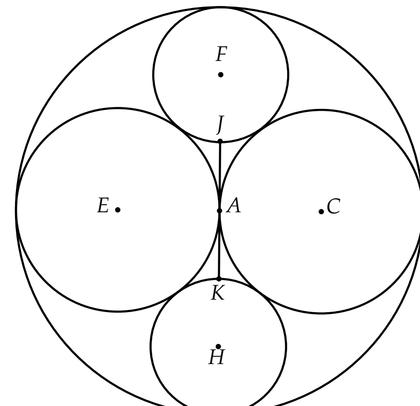
2.2.5 En un círculo de centro A y radio 6, se dibujan cuatro círculos de centros E, C, F y H, respectivamente, que son tangentes entre sí y tangentes al círculo de centro A, tal y como se muestra en la figura adjunta. Si los puntos H, K, A, J y F son colineales, entonces la medida de $\overline{JK}$ corresponde a

(a) 2

(b) 3

(c) 4

(d) 6



2.2.4 Álgebra

N Problema de desarrollo
El siguiente ejemplo resuelto es uno de los tres problemas de desarrollo que formaron parte de esta prueba.

Ejemplo 2.15

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Considere los polinomios

$$p(x) = x^3 + ax^2 + x + 10$$

y

$$q(x) = x^4 + 7x^3 + bx^2 + 9x + c$$

Se sabe que $p(x)$ tiene tres raíces reales distintas y que cada una de las raíces de $p(x)$ es también raíz de $q(x)$. Determine los posibles valores de a, b y c.

Solución:
Sea r la otra raíz de $q(x)$. Entonces se cumple que

$$\begin{aligned} q(x) &= (x-r)\,p(x) \\ &= x \cdot p(x) - r \cdot p(x) \\ &= x^4 + ax^3 + x^2 + 10x - rx^3 + rax^2 + rx + 10r \\ &= x^4 + (a-r)\,x^3 + (1-ra)\,x^2 + (10-r)\,x - 10r \end{aligned}$$

Igualando las dos expresiones para $q(x)$ se obtiene:

$$\begin{cases} 1 = 1 \\ a - r = 7 \\ 1 - ra = b \\ 10 - r = 9 \\ -10r = c \end{cases}$$

Así, $10 - r = 9 \Rightarrow r = 1$. Sustituyendo en la ecuación del término constante se obtiene que $c = -10$. Luego, $a - r = 7 \Rightarrow a - 1 = 7 \Rightarrow a = 8$. Finalmente, $b = -7$.

2.2.6 Considere el sistema de ecuaciones $\begin{cases} -x^2 + y = -1 \\ x^2 - \alpha y = \alpha \end{cases}$, donde x y y son las incógnitas y α es un parámetro. Para que el sistema posea solución única, debe cumplirse que

(a) $\alpha \in \mathbb{R}$

(b) $\alpha \in \mathbb{R} - \{1\}$

(c) $\alpha \in [1, +\infty[$

(d) $\alpha \in]-\infty, 1]$

Ejemplo 2.16

Considere la ecuación $mx^2 + (2m-3)x + m - 2 = 0$, con m constante real. Si la ecuación posee solución única, entonces la solución corresponde a

(a) -3

(b) $\frac{-1}{3}$

(c) $\frac{9}{4}$

(d) $\frac{-9}{4}$

Solución:

$$\begin{aligned} \Delta &= (2m-3)^2 - 4 \cdot m \cdot (m-2) \\ &= 4m^2 - 12m + 9 - 4m^2 + 8m \\ &= -4m + 9 \end{aligned}$$

Luego, $\Delta = 0 \Rightarrow m = \frac{9}{4}$; así, la ecuación es de la forma $\frac{9}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{4} = 0$ y la solución corresponde a $x = \frac{-1}{3}$.

2.3 Nivel III

2.3.1 Razonamiento Lógico y Probabilidad

Ejemplo 2.17

Se lanza una moneda legal al aire en 10 oportunidades. La probabilidad de que caigan exactamente tres escudos es

(a) $\frac{15}{128}$

(b) $\frac{15}{64}$

(c) $\frac{1}{32}$

(d) $\frac{1}{10}$

Solución:
Considere C por corona y E por escudo.
El resultado de los diez lanzamientos pueden expresarse por una sucesión de longitud 10 formada por las caras de la moneda C y E, entonces el número total de posibilidades es $2^{10} = 1024$.
Los casos favorables es cuando se lanza la moneda 10 veces y salen exactamente 3 veces escudos, entonces el total de casos favorables es $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$.
Por lo tanto, la probabilidad de que al lanzar una moneda al aire 120 veces salgan exactamente 3 escudos es $\frac{120}{1024} = \frac{15}{128}$.

2.3.1 Una familia quiere ponerle a su hijo un nombre de tres letras, con las 27 letras que componen el alfabeto, las cuales quieren que estén en el orden usual y estas se pueden repetir; por ejemplo, si fueran las letras A, A y B, el único nombre posible sería AAB. La cantidad de nombres con estas características corresponde a

(a) 2925

(b) 3276

(c) 3303

(d) 3654

Ejemplo 2.18

Se construye una secuencia a_n de números como sigue:

- Se empieza con $a_1 = 123$.
- a_2 se forma escribiendo 123 entre todos los dígitos de a_1, por lo que $a_2 = \mathbf{1}\,123\,\mathbf{2}\,123\,\mathbf{3}$.
- Para a_3 se inserta como antes 123 entre todos los dígitos de a_2; así:

$$a_3 = \mathbf{1}\,123\,\mathbf{1}\,123\,\mathbf{2}\,123\,\mathbf{3}\,123\,\mathbf{2}\,123\,\mathbf{1}\,123\,\mathbf{2}\,123\,\mathbf{3}\,123\,\mathbf{3}$$

- Se continúa de la misma forma en cada paso siguiente para obtener cada término a_n que se desee.

La cantidad de dígitos que tendrá a_{2018} corresponde a

(a) $2^{2018} + 1$

(b) $2^{2019} + 1$

(c) $2^{4035} + 1$

(d) $2^{4037} + 1$

Solución:
Sea b_n el número de dígitos que tiene el número a_n. Se observa que
$b_1 = 3 = 2^1 + 1$
$b_2 = 3 \cdot 2 + 3 = 9 = 2^3 + 1$
$b_3 = 3 \cdot 8 + 9 = 33 = 2^5 + 1$
$b_4 = 3 \cdot 32 + 33 = 129 = 2^7 + 1$
$b_n = 3 \cdot (b_{n-1} - 1) + b_{n-1} = 2^{2n-1} + 1$
Por lo tanto, $b_{2018} = 2^{4035} + 1$ es la cantidad de dígitos que tendrá a_{2018}.

2.3.2 Rolando tiene en su alcancía un total de 2018 monedas de todas las denominaciones (500, 100, 50, 25, 10 y 5 colones, respectivamente). La cantidad de monedas de una denominación menor es mayor que la cantidad de monedas de una denominación mayor, en todos los casos. La cantidad máxima de dinero, en colones, que puede tener Rolando corresponde a

(a) 230 350

(b) 230 300

(c) 203 050

(d) 230 350

2.3.2 Teoría de Números

Ejemplo 2.19

Si a, b y c son números enteros positivos, tales que $ab-1$ es par, entonces con certeza $7^{b+c}a+(b-3)^2c$ es

(a) par

(b) impar

(c) par únicamente si c es impar

(d) impar únicamente si c es par

Solución:
Como $(ab-1)$ es par entonces ab es impar y esto significa que a y b son impares; como 7 es impar, la potencia 7^{b+c} es impar y, finalmente, $7^{b+c}a$ es impar.
Por otro lado, como b es impar entonces $b-3$ es par y la potencia $(b-3)^2$ es par; luego, $(b-3)^2c$ es par (independiente de c).
Por lo tanto, la suma de un número impar y un par da como resultado un número impar.

2.3.3 Sea N el menor entero positivo con exactamente 11 divisores primos positivos. Al dividir N entre 11 el residuo corresponde a

(a) 0

(b) 1

(c) 3

(d) 5

2.3.4 Considere el conjunto $F=\{1,2,3,\ldots,50\}$ y sea S subconjunto de F, que contiene la mayor cantidad de elementos posibles entre los cuales no existen dos elementos cuya suma sea divisible por 7. La cantidad de elementos de S corresponde a

(a) 14

(b) 22

(c) 23

(d) 25

Ejemplo 2.20

Considere las igualdades $r - q = 2p$ y $rq + p^2 = 676$, donde p, q y r son primos. El producto de p, q y r corresponde a

(a) 2018

(b) 2015

(c) 2001

(d) 1998

Solución:
Se considera $x = r - p = q + p$. Entonces,

$$x^2 = (r-p)(q+p) = rq + (r-q)p - p^2 = rq + 2p^2 - p^2 = rq + p^2 = 676$$

Se obtiene $x = 26$. Y p es un primo tal que $26 - p$ y $26 + p$ son primos.
Se prueba con los posibles primos p menores que 26 y se ve que eso solo se cumple para $p = 3$.
Así, $p = 3$, $q = 23$ y $r = 29$ entonces $p \cdot q \cdot r = 2001$.

N Problema de desarrollo
El siguiente ejercicio propuesto es uno de los tres problemas de desarrollo que formaron parte de esta prueba.

2.3.5 El profesor Rolando soñó anoche que un antepasado suyo lo visitó y le dijo: “ si tomo el año en que yo nací, escrito como un número de cuatro dígitos, invierto las cifras y al número mayor le resto el número menor se obtiene 2018”. Cuando despertó pensó que lo que le dijo su antepasado era imposible. Indique, justificando su respuesta, si el profesor Rolando tiene razón.

Ejemplo 2.21

Se calcula el producto de los dígitos de todos los números de cuatro dígitos. La suma de todos los productos obtenidos corresponde a

(a) 3^{45}

(b) 4^{45}

(c) 45^3

(d) 45^4

Solución:
Todos los números que tienen un 0 en su representación, tienen por producto de sus dígitos 0, y por lo tanto, no aportan a la suma.
Consideremos los números con dígitos $x, y, z, w \neq 0$, entonces los productos son $xyzw$.
Nótese que si x, y y z son fijos, y w varía del 1 al 9, entonces estos números contribuyen a la suma

$$xyz\,(1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 45xyz$$

Entre todos los que tienen x y y fijos, aportan a la suma

$$45xy\,(1+2+3+4+5+6+7+8+9) = 45^2xy$$

Siguiendo la misma lógica, se concluye que la suma es 45^4.

N Problema de desarrollo
El siguiente ejercicio propuesto es uno de los tres problemas de desarrollo que formaron parte de esta prueba.

2.3.6 Determine el número natural N más grande, en el que todos sus dígitos son distintos, tal que N es múltiplo de 8, 11 y 15 de manera simultánea.

2.3.3 Geometría y Trigonometría

Ejemplo 2.22

Sean $\square ABCD$ un cuadrado y M el punto de intersección de sus diagonales. Si la bisectriz del $\angle BAC$ interseca a $\overline{BD}$ en E y a $\overline{BC}$ en F, entonces la razón $CF : ME$ corresponde a

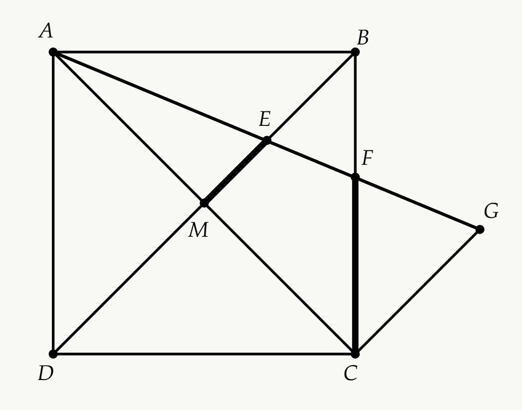
(a) 2

(b) 3

(c) $\dfrac{5}{2}$

(d) $\dfrac{3}{2}$

Solución:
Considere un cuadrado de lado 1, entonces $AC = BD = \sqrt{2}$ y $AM = BM = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Sean $CF = x$ y $ME = y$.
Considere G en la bisectriz del $\angle BAC$, de manera que $\triangle CFG$ sea isósceles con $CF = CG$, como se muestra en la figura.
Se tiene que $\triangle ABF \sim \triangle ACG$ (por criterio A-A), por lo que



$$\frac{AB}{AC} = \frac{BF}{CG} = \frac{BF}{CF} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-x}{x} \Rightarrow x = \frac{2}{2+\sqrt{2}}$$

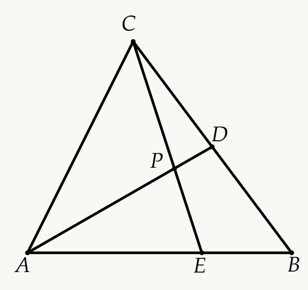
De manera análoga, en $\triangle ABM$ se tiene que $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{BE}{ME} \Rightarrow \sqrt{2} = \dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}} - y}{y} \Rightarrow y = \dfrac{\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}$

Por lo que $\dfrac{CF}{ME} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}} = 2.$

Ⓝ Problema de desarrollo
El siguiente ejemplo resuelto es uno de los tres problemas de desarrollo que formaron parte de esta prueba.

Ejemplo 2.23

Considere la figura siguiente en la que $A-E-B$, $C-D-B$ y P es el punto de intersección de $\overline{CE}$ y $\overline{AD}$.



Si $\dfrac{CD}{DB}=\dfrac{3}{1}$ y $\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{3}{2}$, determine $\dfrac{CP}{PE}$.

Solución:

Sea R un punto tal que $C-R-P$ y $DR \parallel AB$, así $\dfrac{CR}{RE}=\dfrac{CD}{DB}=\dfrac{3}{1}$, $\dfrac{RD}{EB}=\dfrac{CD}{CB}=\dfrac{3}{4}$ y así: $CR=3RE=3(RP+PE)$, $RD=\dfrac{3}{4}EB$, además $CP=CR+RP=4RP+3PE$.

Como $\triangle RDP \sim \triangle EAP$, $\dfrac{RP}{PE}=\dfrac{RD}{AE} \quad \Rightarrow RD=\dfrac{RP\cdot AE}{PE}$ pero $AE=\dfrac{3}{2}EB$ y así

$RD=\dfrac{RP}{PE}\cdot\dfrac{3}{2}EB \quad \Rightarrow \dfrac{3}{4}EB=\dfrac{3}{2}EB\cdot\dfrac{RP}{PE}\Rightarrow RP=\dfrac{1}{2}PE$

$\therefore CP=4\cdot\dfrac{1}{2}PE+3PE=5PE \quad \Rightarrow \dfrac{CP}{PE}=5$

2.3.7 Dos circunferencias son tangentes exteriormente en el punto C, $\overleftrightarrow{AB}$ es una tangente común que no contiene a C, con A y B puntos de tangencia. Si se tiene que $AC=8$ y $BC=6$, entonces la medida de uno de los radios de las circunferencias corresponde a

(a) $\dfrac{5}{6}$

(b) $\dfrac{5}{8}$

(c) $\dfrac{3}{20}$

(d) $\dfrac{15}{4}$

2.3.4 Álgebra

Ejemplo 2.24

La cantidad de pares (x,y) de enteros que cumplen $x \leq y$ y que satisfacen que su producto sea igual a 5 veces su suma corresponde a

(a) 4

(b) 5

(c) 6

(d) 7

Solución:

Se tiene que $xy = 5(x+y) = 5x + 5y$ de donde $y = \dfrac{5x}{x-5}$, o de manera similar $x = \dfrac{5y}{y-5}$.

Los posibles valores para el denominador son $-5, -1, 1$ o 5, pues en el resto de los casos, no queda un número entero.

Para que el denominador sea -5 entonces $x = y = 0$; para que el denomidor sea -1, se tendría $y = 4$ y $x = -20$; para que el denominador sea 1, se tendría $x = 6$ y $y = 30$, y para que el denominador sea 5 se tendría $x = y = 10$.

Así que en total son cuatro posibilidades.

Capítulo 3

Etapa Final

3.1 Nivel I

3.1.1 Razonamiento Lógico y Probabilidad

Ejemplo 3.1

En el periodo de vacaciones de medio año, 6 compañeros se pusieron de acuerdo para verse en casa de alguno de ellos y jugar video juegos. Sin embargo, cada vez que se reunían exactamente un compañero no podía asistir. Si se sabe que el que más veces asistió fue 10 veces y el que menos asistió fue 7 veces, determine la cantidad de veces que fueron el resto de compañeros.

Solución:

Falta por asignar las veces que fueron los otros 4 compañeros. Las posibilidades son:

a Los 4 asistieron 8 veces.

b 3 asistieron 8 veces y uno 9 veces.

c 2 asistieron 8 veces y 2 asistieron 9 veces.

d 1 asistió 8 veces y los otros tres 9 veces.

e Los 4 asistieron 9 veces.

Si se contabilizan las veces que asistieron entre todos según las posibilidades descritas anteriormente, se tiene que:

Si se da opción a, entonces asistieron 49 veces; si se da opción b, entonces asistieron 50 veces; si se da opción c, entonces asistieron 51 veces; si se da opción d, entonces asistieron 52 veces; y si se da opción e, entonces asistieron 53 veces.

Por otra parte, se sabe que siempre faltó exactamente uno de los 6 compañeros, por lo tanto siempre asistieron 5 de ellos, es decir, el total de asistencia debe ser múltiplo de 5, lo cual nos deja únicamente una posibilidad. Así, 3 asistieron 8 veces y uno de ellos 9 veces.

Ejemplo 3.2

En un tablero 7×7 se colocan ocho fichas. ¿Pueden elegirse siempre dos de ellas que no estén en la misma fila ni en la misma columna ni en la misma diagonal? Justifique complemente su análisis.

Solución:

La respuesta es sí. Para demostrarlo, se va a asociar un número entre 1 y 7 a cada casilla del tablero como muestra la siguiente tabla:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se puede observar que cada número aparece una vez en cada fila y en cada columna y no aparece más de una vez en la misma diagonal (los números van como a salto de caballo).
Por otro lado, el principio del palomar nos asegura que si colocamos ocho fichas siempre habrá dos que compartan el mismo número y, por tanto, estas no se hallarán en la misma columna, fila o diagonal.

Ejemplo 3.3

Indique la forma y el color que tiene un objeto si se saben las siguientes afirmaciones:

- Si es azul, entonces es redondo.
- Si es cuadrado, entonces es rojo.
- Es azul o amarillo.
- Si es amarillo, entonces es cuadrado.
- Es cuadrado o redondo.

Solución:

Hay tres colores y dos formas por lo que se tienen 6 posibilidades azul y cuadrado, azul y redondo, amarillo y cuadrado, amarillo y redondo, rojo y cuadrado, rojo y redondo.
Por la segunda afirmación un objeto cuadrado no puede ser amarillo ni azul, por lo que descartamos azul y cuadrado,amarillo y cuadrado.
Por la afirmación 3 el objeto no es rojo, por lo que descarta rojo y cuadrado, rojo y redondo.
Por la afirmación 4 no puede ser amarillo y redondo.
Por lo tanto, el objeto solo puede ser azul y redondo.

(N) Problema 4 (día 2)
El siguiente ejercicio propuesto es uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 2.

3.1.1 Un juego para dos personas consiste en lo siguiente: un jugador selecciona cuatro de seis colores disponibles, sin repetir, y los coloca en cierto orden, el segundo jugador debe tratar de adivinar los colores y el orden seleccionados para lo cual tiene cuatro intentos. En cada intento, el primer jugador le dice cuántos colores escogió correctamente y cuántos están colocados en el orden correcto. Los seis colores disponibles son amarillo, azul, café, morado, rojo y verde.
Sara escogió los cuatro colores y su amiga Emma trata de adivinarlos. En su primer intento, Emma escogió rojo, amarillo, verde, azul, en ese orden respectivamente; Sara le indicó que tres de esos colores son correctos (están entre los inicialmente escogidos por Sara) pero solamente uno está en la posición corecta.
En el segundo intento Emma colocó, en el orden 1, 2, 3, 4, los colores rojo, café, amarillo y verde; Sara le indicó que ahora solamente tenía dos colores correctos, uno de ellos en la posición correcta.
Entonces Emma escogió los colores rojo, morado, azul y amarillo (en el orden 1, 2, 3, 4 respectivamente) y Sara le dijo que ahora tenía los cuatro colores correctos pero ninguno en posición correcta.
Determine el orden correcto de los colores escogidos inicialmente por Sara.

3.1.2 Un juego consiste de una cadrícula de tamaño 5×5 y una ficha, que se coloca en la casilla ubicada en la esquina inferior izquierda. Dos jugadores, por turnos, mueven la ficha un único espacio (horizontal, vertical o diagonal) avanzando hacia la casilla ubicada en la esquina superior derecha, gana el jugador que logre llevar la ficha a dicha casilla. Xiomara y Yuri querían jugar una partida, pero cuando Xiomara iba a empezar, Yuri le dijo que era injusto, porque quien empezaba tenía una estrategia ganadora, que mejor cambiaran el tamaño de la cuadrícula.
Indique si Yuri tiene razón en que existe una estrategia ganadora para el primer jugador para la cuadrícula de tamaño 5×5, en caso de existir, explique cuál es dicha estrategia; además, determine todos los valores de m y n para los cuales exista una estrategia ganadora para el primer jugador en un un tablero de m filas y n columnas.
Nota: Se entiende por *estrategia ganadora* un método de juego que le garantiza la victoria al que lo aplica sin importar lo que haga su oponente.

(N) Problema 1 (día 1)
El siguiente ejercicio propuesto es uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 1.

3.1.3 La orientadora y el profesor guía de un colegio del Gran Área Metropolitana, investigan cuál estudiante "hackeó" la cuenta de *Instagram* de Olcoman.
Tienen cinco estudiantes sospechosos a quienes llaman y toman la declaración:

Federico: Fue Alexander.
Leonel: Yo no fui.
Randall: No fue Federico.
Alexander: Fue Erick.
Erick: Alexander miente.

Se sabe que solamente un estudiante miente. ¿Es posible determinar al culpable? En caso afirmativo indíquelo.

3.1.4 Se disponen 2018 presos en fila india y a cada uno se le coloca un sombrero blanco o negro, de forma que cada uno ve el color de los sombreros de los presos que están delante de él en la fila (pero no el propio ni de quienes se encuentran detrás de él en la fila). Se les pregunta a todos los presos por el color de su sombrero, por orden desde el último de la fila hasta el primero. El que acierta logra su libertar y el que no queda en la cárcel.
Mediante una estrategia adecuada pactada previamente por los presos, ¿cuál es el máximo número de presos que podemos garantizar que se salvan?

3.1.2 Teoría de Números

3.1.5 Considere el número entero $b = 222\ldots222$ conformado por n dígitos y considere el número entero $a = 111\ldots111$ conformado por $2n$ dígitos. Demuestre que el número entero $a - b$ es un cuadrado perfecto.

3.1.6 Considere las condiciones siguientes para algún número n:

(i) n está conformado exactamente por cuatro cifras.

(ii) Las cifras de n son impares.

(iii) Al dividir n entre 5, el cociente es también un número entero con todas sus cifras impares.

Determine la cantidad de números enteros n que existen.

3.1.7 Determinar todos los números enteros n de cinco cifras, tales que el cuadrado de n sea un número que termine en las mismas cinco cifras de n colocadas en el mismo orden.

N Problema 6 (día 2)
El siguiente ejemplo resuelto es uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 2.

Ejemplo 3.4

Determine todos los números enteros de tres dígitos con exactamente 16 divisores positivos.

Solución:
Sea n el número buscado. Debe cumplirse: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$ donde $p_1, p_2, \cdots, p_r$ son primos distintos y $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ son enteros positivos. El número de divisores positivos de n es $d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\cdots(\alpha_r + 1)$.
Desde que $2^{10} > 1000$, debemos buscar números que sean producto de al menos dos primos distintos. Tenemos los siguientes dos casos:

Caso I: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2}$.
Para este caso, $d(n) = 16$ si y solo si $\alpha_1 + 1 = 2$ y $\alpha_2 + 1 = 8$. Los números n que satisfacen $100 \leq n < 1000$ son: $2^7 \cdot 3 = 384, 2^7 \cdot 5 = 640$ y $2^7 \cdot 7 = 896$
Como también, $d(n) = 16$ si y solo si $\alpha_1 + 1 = 4$ y $\alpha_2 + 1 = 4$. Los números n que satisfacen $100 \leq n < 1000$ son: $2^3 \cdot 3^3 = 216$

Caso II: $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot p_4^{\alpha_4}$.
Entonces, $d(n) = 16$ si y solo si $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$. Los números de tres dígitos que son producto de cuatro primos distintos son: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 330, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = 390, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 17 = 510, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19 = 570, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 23 = 690, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29 = 870, 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31 = 930, 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 770$ y $2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 910$
De los casos I y II, todos los números enteros de tres dítitos con exactamente 16 divisores positivos son: 210, 216, 330, 384, 390, 510, 570, 640, 690,770, 870, 896, 910 y 930.

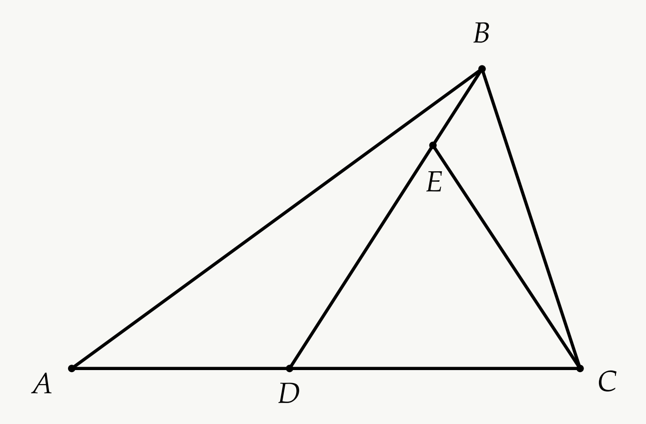
N Problema 3 (día 1)
El siguiente ejercicio propuesto es uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 1.

3.1.8 Diana escribió en la pizarra todos los números de cinco cifras que son cuadrados perfectos y Carlos escribió debajo de cada uno de estos números la suma de sus cifras. ¿Cuál es el mayor número que escribió Carlos?

3.1.3 Geometría

Ejemplo 3.5

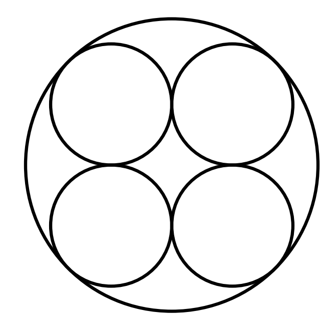
Considere la figura adjunta en la que $A-D-C$ y $D-E-B$. Si $m\angle BAC = 42°$, $m\angle BDC = 56°$, $DC = DE$ y $AB = AC$, determine $m\angle BCE$.



Solución:

Se tiene que el $\angle BDC$ mide $56°$, entonces $m\angle ADB = 180° - m\angle BDC = 124°$.
Luego, el $\angle BAC$ mide $42°$ entonces $m\angle ABD = 180° - m\angle BAC - m\angle ADB = 14°$.
Como $DE = DC$ entonces $m\angle DCE = m\angle DEC$, así que, $2m\angle DCE + 56° = 180° \Rightarrow m\angle DCE = m\angle DEC = 62°$.
Por otro lado, $AB = AC$ entonces $m\angle ABC = m\angle ACB$, así que, $2m\angle ACB = 180° - m\angle BAC \Rightarrow m\angle ACB = 69°$. Observe que $m\angle ACB = m\angle DCB = 69°$
Pero $m\angle DCB = m\angle DCE + m\angle BCE \Rightarrow m\angle BCE = m\angle DCB - m\angle DCE = 69° - 62° = 7°$

3.1.9 En la figura adjunta, los cuatro círculos de menor radio tienen diámetro igual a 4 cm. y cada uno es tangente a sus dos vecinos y al círculo mayor radio que los encierra. Determine el área de la región acotada por los cuatro círculos internos.

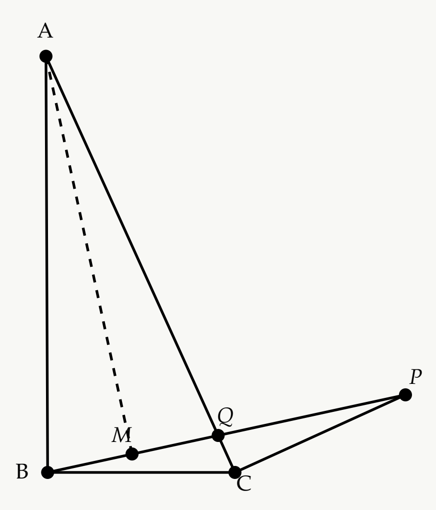


Ⓝ Problema 2 (día 1)
El siguiente ejemplo resuelto es uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 1.

Ejemplo 3.6

Considere el $\triangle ABC$ recto en B. Sea P un punto, tal que $\angle ACP$ es recto y $\overline{BP}$ interseca a $\overline{AC}$ en Q. Si M es el punto medio de $\overline{BQ}$ y $BC = CP$, determine $m\angle AMB$.

Solución:



Con ayuda de la figura de la izquierda, se tiene que $m\angle ACP = 90°$ por ser recto.

Como $BC = CP$ entonces $\triangle BCP$ es isósceles y, así, $m\angle PBC = m\angle BPC = x$.

Como $\angle ABC$ es recto, entonces $m\angle ABQ$ es $90° - x$.

$\triangle QCP$ es recto en C, entonces se tiene que $m\angle PQC = 90° - x$ y, así, $m\angle AQM = 90° - x$ (opuestos por el vértice).

Entonces $\triangle AQB$ es isósceles, por lo que $\overline{AM} \perp \overline{BQ}$ y, por lo tanto, $m\angle AMB = 90°$.

3.1.10 Considere el $\triangle ABC$. Sea P un punto de $\overline{AC}$, tal que $\overline{BP}$ biseca al $\angle ABC$; en forma similar, sea Q un punto de $\overline{AB}$, tal que $\overline{QC}$ biseca al $\angle BCA$.
Si $\overline{AK}$ es la altura del $\triangle AQC$ y $\overline{AH}$ es la altura del $\triangle APB$. Determine si las rectas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{KH}$ se intersecan o son paralelas. Justifique.

Ⓝ Problema 5 (día 2)
El siguiente ejercicio propuesto es uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 2.

3.1.11 Sea el $\triangle ABC$, D el punto medio de $\overline{BC}$, E el punto medio de $\overline{AD}$, F el punto medio de $\overline{BE}$ y G el punto medio de $\overline{FC}$. Si el área del $\triangle ABC = 16 \text{ m}^2$, determine el área del $\triangle EFG$.

3.2 Nivel II

3.2.1 Razonamiento Lógico y Probabilidad

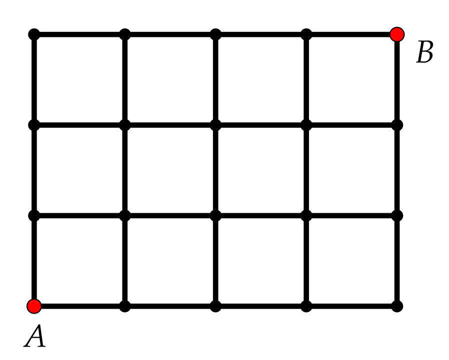
Ejemplo 3.7

En un polígono de $2n$ lados, se colorean los vértices alternadamente con dos colores, negro y blanco. Determine la cantidad de diagonales que tienen extremos de colores diferentes.

Solución:
Primero, observe que como hay $2n$ lados, entonces también hay $2n$ vértices.
Como los colores son alternados, entonces deben existir n vértices negros y n vértices blancos.
Por otro lado, observe que si un vértice es blanco, entonces sus vecinos son negros; es decir, estos segmentos tienen extremos de diferente color, pero son lados del polígono. Luego, de cada vértice se puede trazar $n-2$ diagonales a un vértice de distinto color. Además, existen $2n$ posibles vértices, lo que da como resultado $2n \cdot (n-2)$ diagonales.
Finalmente, cada diagonal se está contando dos veces; es decir, la cantidad total es

$$\frac{2n \cdot (n-2)}{2} = n(n-2)$$

3.2.1 En la figura adjunta se muestra un plano en el que aparecen las calles que delimitan 12 manzanas cuadradas en un barrio de la ciudad.
En el plano, el Norte corresponde a la parte superior y el Este a la derecha. Jennifer se encuentra en el punto A y debe llegar al punto B, mientras que Steven que se encuentra en el punto B debe llegar al punto A.
Tanto Jennifer como Steven han planificado su ruta para recorrer la longitud mínima necesaria para llegar a su destino.
Asumiendo que parten simultáneamente y que ambos caminan a la misma velocidad constante, determine la probabilidad de que se crucen durante su recorrido.



Ⓝ Problema 1 (día 1)
El siguiente ejercicio propuesto es uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 1.

3.2.2 Considere la sucesión infinita de números:

$$1, 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 23, 25, \ldots$$

La sucesión se construyó colocando el primer impar (1), luego los dos pares siguientes (2, 4), luego los tres impares que siguen al último número par colocado (5, 7, 9), luego los cuatro pares que siguen al último número impar colocado (10, 12, 14, 16), luego los cinco impares que siguen al último número par colocado (17, 19, 21, 23, 25) y así sucesivamente.
Determine cuál es el número par más cercano a 1998 que aparece en la sucesión y que posición ocupa ese número en la misma.

Ⓝ Problema 5 (día 2)
El siguiente ejemplo resuelto es uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 2.

Ejemplo 3.8

En cada una de las seis caras de un cubo se escribe un entero positivo que es una potencia de dos. A cada vértice se le asigna el producto de los números en las tres caras adyacentes al mismo. Cuando se suman todos los números asignados a cada uno de los vértices, se obtiene 30. Encuentre todas las posibles distribuciones de números asignados a las caras del cubo.

Solución:
Note que si (a_1, a_2), (b_1, b_2) y (c_1, c_2) son respectivamente los números asignados a caras opuestas, entonces, los vértices reciben los valores $a_1b_1c_1$, $a_1b_1c_2$, $a_1b_2c_1$, $a_1b_2c_2$, $a_2b_1c_1$, $a_2b_1c_2$, $a_2b_2c_1$ y $a_2b_2c_2$, respectivamente. Es fácil verificar que

$$a_1b_1c_1 + a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 + a_1b_2c_2 + a_2b_1c_1 + a_2b_1c_2 + a_2b_2c_1 + a_2b_2c_2 = (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(c_1 + c_2)$$

Como $(a_1 + a_2)(b_1 + b_2)(c_1 + c_2) = 30$, sin pérdida de generalidad, $a_1 + a_2 = 2$, $b_1 + b_2 = 3$ y $c_1 + c_2 = 5$.
Como todos son potencias de dos, podemos entonces concluir que $a_1 = a_2 = b_1 = c_1 = 1$, $b_2 = 2$ y $c_2 = 4$.
Todos los demás arreglos se obtienen como permutaciones de estas.

3.2.3 En un país hay 17 ciudades. El gobierno va a construir n autopistas de modo que cada autopista conecta dos ciudades del país. Determine el valor mínimo de n, de modo que,

independientemente de cómo se construyan las autopistas, se puede viajar entre cualesquiera dos ciudades (posiblemente pasando por otras ciudades).

3.2.4 En una mesa circular están sentadas cinco mujeres de tal forma que cada una tiene a dos amigas vecinas y a dos amigas en frente; de ese mismo modo están sentados Carlos y otros cuatro amigos en otra mesa circular.
Se observa que las 10 personas únicamente usan dos redes sociales INS y FAC para comunicarse entre sí, pero para cada amigo o amiga en particular utilizan únicamente una de las dos; además, tres personas cualesquiera no usan la misma red social para comunicarse entre ellos.
Si Carlos le comunica por FAC a su vecino Juan: "Las cinco mujeres cuando se comunican con una vecina lo hacen por FAC, mientras que cuando lo hacen con una amiga del frente lo hace por INS" a lo cual Juan le responde "los hombres hacemos lo mismo". Determine si Carlos y Juan dicen la verdad.

3.2.2 Teoría de Números

(N) Problema 3 (día 1)
El siguiente ejemplo resuelto es uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 1.

Ejemplo 3.9

Sea $n > 2$ un número entero positivo, tal que para $k = 1,2,\ldots,n-1$, el número $4k^2 + n$ es primo. Demuestre que $n+1$ es una potencia de 2.

Solución:
Nótese que como $n+4$ es un número primo mayor que 2, entonces n necesariamente es impar. Asuma que $n+1$ no es una potencia de 2, y considere p un primo impar que lo divide. Note que $p \leq \dfrac{n+1}{2} < n$. Considere $k = \dfrac{p-1}{2}$, entonces

$$4k^2 + n = (p-1)^2 + n = p(p-2) + (a+1)$$

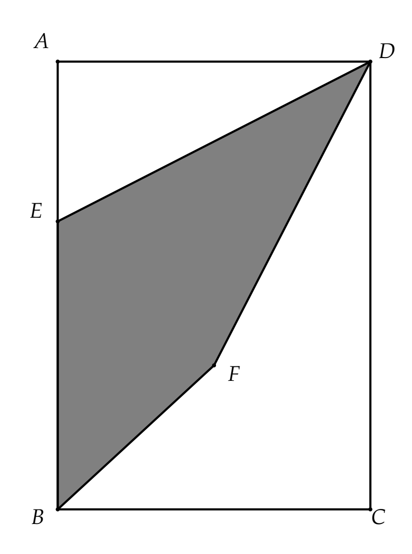
Por lo tanto, $p|4k^2 + n$, y por ende, $4k^2 + n$ no es primo, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto, $n+1$ es una potencia de 2.

3.2.5 Para n un entero positivo, se define u_n como el mínimo entero positivo tal que $n!\,u_n$ es un cuadrado perfecto. Demuestre que hay infinitos valores de n para los cuales $u_n < u_{n+1}$, e infinitos valores de n donde $u_n > u_{n+1}$.

3.2.6 Sea n un número entero y sean $x = n+1$, $y = 2n+1$, $z = 3n+1$. Demuestre que si y y z son cuadrados perfectos, entonces x es a la vez la suma de los cuadrados de dos números consecutivos y la suma del cuadrado de un número t más el doble del cuadrado de $t+1$.

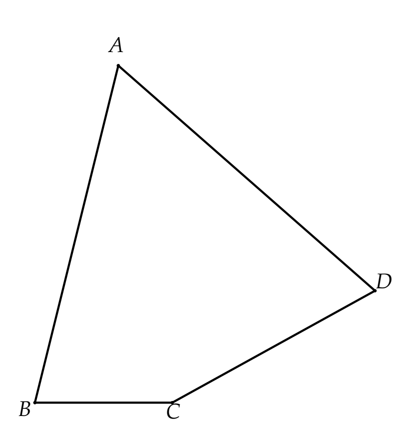
3.2.3 Geometría

3.2.7 Sea el $\square ABCD$ un rectángulo, tal que $3AD = 2CD$. Sea E tal que $A - E - B$, $EB = BC$ y F punto medio de $\overline{EC}$. Determine qué razón del rectángulo $ABCD$ representa el área sombreada.



N Problema 4 (día 2)
El siguiente ejercicio propuesto es uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 2.

3.2.8 Considere el $\square ABCD$ de la figura adjunta. Sea E un punto tal que $A - E - B$, $m\angle BEC = 30°$, $m\angle ABC = m\angle ACB = 80°$ y $\overline{AB} \cong \overline{BD} \cong \overline{AD}$. Demuestre que $\overline{EC} \cong \overline{CD}$.

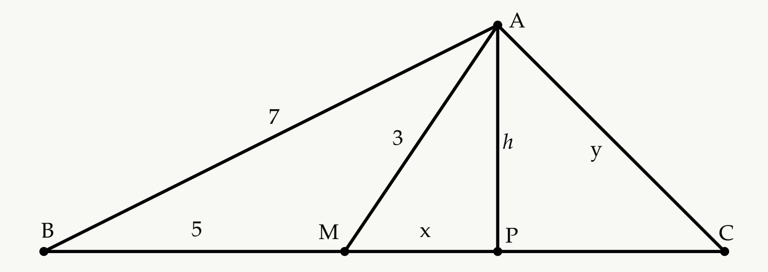


(N) Problema 2 (día 1)
El siguiente ejemplo resuelto es uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 1.

Ejemplo 3.10

Considere el $\triangle ABC$ en el que $AB = 7$ cm. Si M es un punto en $\overline{BC}$, tal que $BM = 5$ cm, $MC = 6$ cm. y $AM = 3$ cm, determine la medida de $\overline{AC}$.

Solución:
Se sabe que $\triangle AMB$ es obtuso pues $7^2 > 3^2 + 5^2$. Si P es el pie de la perpendicular desde A sobre $\overline{BC}$, entonces P está entre M y C.



Sean x, y, h como en la figura. Aplicando el teorema de Pitágoras en los triángulos $\triangle APB$ y $\triangle APM$

$$(x+5)^2 + h^2 = 7^2 \text{ y } h^2 = 3^2 - x^2$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera

$$(x+5)^2 + 3^2 - x^2 = 7^2 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$h = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{27}}{2}$$

Como $MC = 6$ cm, entonces $PC = 6 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ cm.
Ahora en el $\triangle APC$

$$y^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{27}}{2}\right)^2 = 27$$

Por lo tanto, $y = \sqrt{27}$ cm.

3.2.9 Considere el $\triangle ABC$, tal que $m\angle CAB = 45°$ y $m\angle CBA = 30°$. Sean D en $\overline{AB}$ y E en $\overline{AC}$, tales que $m\angle ADE = 60°$ y $\overline{DE}$ divide al $\triangle ABC$ en dos regiones con áreas iguales.

Demuestre que $\left(\dfrac{AB}{AD}\right)^4 = 12.$

3.2.10 Si $\square ABCD$ es un trapecio de base mayor $\overline{CD}$ en el que O es el punto de intersección de $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{DA}$, el punto E es el simétrico del punto B con respecto al punto O, el punto F es el simétrico del punto B con respecto al punto medio de $\overline{CD}$, el punto G es el simétrico del punto A con respecto al punto medio de $\overline{CE}$, y el punto H es el simétrico del punto A con respecto al punto O. Si $m\angle ADC = 60°$ y $m\angle BCD = 45°$, determine el valor de $m\angle CGF + m\angle CEA$.

3.2.4 Álgebra

Ejemplo 3.11

Considere el polinomio $p(x)$ dado por $p(x) = x^2 + ax + b$. Determine todos los resultados enteros $a+b$, tales que $p(a+b) = 0$.

Solución:
Como $a+b$ es raíz del polinomio $p(x)$, se tiene que:

$$\begin{aligned} p(a+b) = 0 \quad &\Rightarrow \quad (a+b)^2 + a(a+b) + b = 0 \\ &\Rightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 + a^2 + ab + b = 0 \\ &\Rightarrow \quad b^2 + (3a+1)b + 2a^2 = 0 \end{aligned}$$

Así, b debe ser raíz del polinomio $q(x) = x^2 + (3a+1)x + 2a^2$. Como b debe ser entero y $q(x)$ posee raíz entera si su discriminante Δ es cuadrado perfecto, se tiene:

$$\begin{aligned} \Delta &= (3a+1)^2 - 4 \cdot 2a^2 \\ &= 9a^2 + 6a + 1 - 8a^2 = a^2 + 6a + 1 \\ &= \left(a^2 + 6a + 9\right) - 8 = (a+3)^2 - 8 \end{aligned}$$

Si c es entero, se busca a de manera que $(a+3)^2 - 8 = c^2 \Rightarrow (a+3)^2 - c^2 = 8$. Los únicos cuadrados perfectos cuya diferencia es 8 son 9 y 1, por lo que:

$$\begin{aligned} (a+3)^2 = 9 \quad &\Rightarrow \quad a + 3 = \pm 3 \\ &\Rightarrow \quad a = \pm 3 - 3 \\ &\Rightarrow \quad a = -6 \vee a = 0 \end{aligned}$$

Con $a = -6 \Rightarrow b^2 - 17b + 72 = 0 \Rightarrow b = \dfrac{17 \pm 1}{2} \Rightarrow b = 9 \vee b = 8.$
Con $a = 0 \Rightarrow b^2 + b = b(b+1) = 0 \Rightarrow b = -1 \vee b = 0.$
Por lo tanto, los posibles valores $a+b$ son: $0, 3, 2$, o -1.

(N) Problema 6 (día 2)
El siguiente ejemplo resuelto es uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 2.

Ejemplo 3.12

Considere el polinomio $p(x)$ dado por $p(x) = 2x^2 + (1-2a)x + a^2 - 3$. Halle todos los valores reales positivos de la constante a, y los respectivos valores para los ceros x_1 y x_2 de $p(x)$, tales que $2x_1 = 2x_2 - 1$.

Solución:
Dado que $p(x) = 2x^2 + (1-2a)x + a^2 - 3$, se tiene que:

$$p(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 + (1-2a)x + a^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + \left(\frac{1-2a}{2}\right)x + \frac{a^2-3}{2} = 0$$

Como x_1 y x_2 son ceros del polinomio, $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{a^2-3}{2}$ y $x_1 + x_2 = -\dfrac{1-2a}{2} = \dfrac{2a-1}{2}$
Luego, dado que $2x_1 = 2x_2 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2 - \dfrac{1}{2}$. Además:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 = -\frac{1-2a}{2} \quad &\Rightarrow \quad x_1 + x_2 = \frac{2a-1}{2} \Rightarrow x_2 - \frac{1}{2} + x_2 = \frac{2a-1}{2} \\ &\Rightarrow \quad 2x_2 = \frac{2a-1}{2} + \frac{1}{2} = a \Rightarrow x_2 = \frac{a}{2} \end{aligned}$$

De forma análoga,

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 = \frac{a^2-3}{2} \quad &\Rightarrow \quad \left(x_2 - \frac{1}{2}\right) \cdot x_2 = \frac{a^2-3}{2} \\ &\Rightarrow \quad \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2-3}{2} \Rightarrow \frac{a^2-a}{2} = a^2 - 3 \\ &\Rightarrow \quad a^2 - a = 2a^2 - 6 \Rightarrow a^2 + a - 6 = (a+3)(a-2) = 0 \end{aligned}$$

De las soluciones $a = -3$ y $a = 2$, la primera se descarta (pues a debe ser positivo). Así, con $a = 2$ se tiene $x_2 = 1$ y $x_1 = \dfrac{1}{2}$.

3.2.11 Si x, y, z son números reales, tales que $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ xy + yz + zx = 5 \end{cases}$
Determine el valor máximo de $S = (x-y)^2$.

3.3 Nivel III

3.3.1 Razonamiento Lógico y Probabilidad

 Arnulfo y Berenice juegan el siguiente juego: Inicia uno de los dos escribiendo un número del 1 al 30; el otro escoge un número del 1 al 30 y se lo suma al número inicial; el primer jugador escoge un número del 1 al 30 y se lo suma al resultado anterior; continúan de la misma manera hasta que alguno logre sumar 2018. Cuando Arnulfo iba a iniciar, Berenice le dijo que era injusto, porque quien empezaba tenía una estrategia ganadora, que mejor cambiaran los números. Entonces se hicieron la siguiente pregunta:
Sumando números escogidos desde 1 hasta a, hasta llegar al número b, ¿qué condiciones deben cumplir a y b para que el primer jugador no tenga estrategia ganadora?
Indique si Arnulfo y Berenice tienen razón y responda la pregunta hecha por ellos.

(N) Problema 1 (día 1)
El siguiente ejemplo resuelto es uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 1.

Ejemplo 3.13

Se tienen 10 puntos en una circunferencia y se trazan todos los segmentos posibles en los cuales dos de estos puntos son los extremos. Determine la probabilidad de que al seleccionar dos segmentos de manera aleatoria, estos se corten en algún punto (podría ser en la circunferencia).

Solución:
Note que hay $\binom{10}{2} = 45$ segmentos, por lo que se pueden escoger dos de ellos de $\binom{45}{2} = 990$ formas.
Si se cortan dentro de la circunferencia es lo mismo que escoger cuatro puntos de los diez y entre ellos habría una única opción para que los segmentos formados por ellos se corten en el interior.
Si se cortan en la circunferencia uno de estos puntos debe ser extremo de ambos segmentos, y escogiendo tres de estos puntos habría 3 posibilidades para formar los segmentos que se intersequen en uno de sus vértices.
Así, la cantidad total será $\binom{10}{4} + 3\binom{10}{3} = 570$ formas.
Por lo tanto, la probabilidad será $\dfrac{570}{990} = \dfrac{19}{33}$.

3.3.2 Jordan se encuentra en el centro de un círculo cuyo radio mide 100 metros y puede moverse un metro a la vez; sin embargo, hay un gigante que en cada paso lo puede obligar a moverse en la dirección opuesta a la que él escogió (no significa devolverse al lugar de partida, sino avanzar pero en la dirección opuesta a la escogida). Determine el número mínimo de pasos que debe dar Jordan para salir del círculo.

Ejemplo 3.14

En un tablero 30×30 se enumeran tanto las filas del 1 al 30 como las columnas; además, a cada casilla se le asigna el número ij, donde la casilla está en la fila i y en la columna j.
Se escogen n columnas y m filas, donde $1 < n$ y $m < 30$, y se pintan de azul las casillas que están simultáneamente en alguna de las filas y en alguna de las columnas seleccionadas. Se pintan de rojo las demás.

(a) Demuestre que la suma de los números en las casillas azules no puede ser primo.

(b) ¿Puede ser primo el resultado de la suma de los números en las casillas rojas?

Solución:

(a) Asuma que se tomaron las filas $a_1, \ldots, a_m$ y las columnas $b_1, \ldots, b_n$. Por ende, los números en las casillas azules corresponden a todas las combinaciones $a_i b_j$ con $1 \leq i \leq m$ y $1 \leq j \leq n$. Es sencillo corroborar que la suma de estas sería

$$S = (a_1 + \cdots + a_m)(b_1 + \cdots + b_n).$$

Como S es el producto de dos enteros, cada uno de ellos la suma de enteros positivos, S no puede ser primo.

(b) Sí puede ser. Por ejemplo, si se escogen las filas $2, \ldots, 30$ y las columnas $2, \ldots, 30$, entonces las casillas rojas corresponden a la primera columna, y a la primera fila.

Por lo tanto, su suma T sería $T = 2(1 + \cdots + 30) - 1 = 929$, que en efecto es un número primo.

3.3.3 La compañía *Matini* sacó un álbum especial con las banderas de los 12 países que compiten en la Copa CONCACAM de Matemática. Cada sobre de postales tiene dos banderas escogidas aleatoriamente. Determine el mínimo número de sobres que se necesitan abrir para que la probabilidad de tener una bandera repetida sea 50%.

3.3.2 Teoría de Números

Ejemplo 3.15

Demuestre que existen solamente dos conjuntos de enteros positivos consecutivos que cumplen que la suma de sus elementos es igual a 100.

Solución:

Sean $n+1, n+2, \cdots, n+r$ los r números consecutivos.

Así, $100 = (n+1)+(n+2)+\cdots+(n+r) = rn + \dfrac{r(r+1)}{2} \Rightarrow 200 = r(2n+r+1)$

Luego, r es divisor de 200 y como $1 < r < 2n+r+1 \Rightarrow r^2 < r(2n+r+1) \Rightarrow r < \sqrt{200}$

Ahora, $r = 2,4,5,8$ o 10.

Si $r = 2,4$ o 10, entonces n no es entero y los únicos valores para r son 5 y 8.

Si $r = 5$, entonces $n = 17$ y el conjunto es $\{18,19,20,21,22\}$ y si $r = 8$ entonces $n = 8$ y el conjunto es $\{9,10,\cdots,16\}$ que son los únicos conjuntos.

3.3.4 Determine todas las ternas (a,b,c) de enteros no negativos que satisfagan:

$$(c-1)(ab-b-a) = a+b-2$$

3.3.5 Sean a y b enteros positivos tales que $2a^2 + a = 3b^2 + b$. Pruebe que $a-b$ es un cuadrado.

3.3.6 Sea p un número primo tal que $p = 10^{d-1} + 10^{d-2} + \cdots + 10 + 1$.
Demuestre que d es primo.

(N) Problema 5 (día 2)
El siguiente ejemplo resuelto es uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 2.

3.3.7 Sean a y b números pares, tales que $M = (a+b)^2 - ab$ es múltiplo de 5. Considere las afirmaciones siguientes:

I) Los dígitos de las unidades de a^3 y b^3 son diferentes.

II) M es divisible por 100.

Indique cuáles de las afirmaciones anteriores, con certeza, son verdaderas.

3.3.3 Geometría y Trigonometría

3.3.8 Sea O el centro de la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$, y sea P un punto cualquiera sobre $\overline{BC}$ ($P \neq B$ y $P \neq C$).
Suponga que la circunferencia circunscrita al $\triangle BPO$ corta al $\overline{AB}$ en R ($R \neq A$ y $R \neq B$) y que la circunferencia circunscrita al $\triangle COP$ corta al $\overline{CA}$ en el punto Q ($Q \neq C$ y $Q \neq A$).

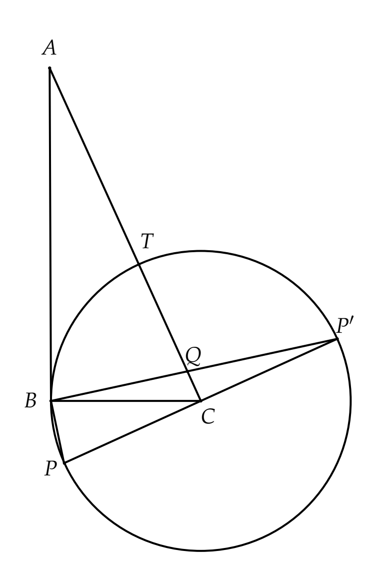
1) Demuestre que $\triangle PQR \sim \triangle ABC$ y que O es ortocentro de $\triangle PQR$.

2) Demuestre que las circunferencias circunscritas a los triángulos $\triangle BPO$, $\triangle COP$ y $\triangle PQR$ son todas de igual radio.

3.3.9 Considere el $\triangle ABC$, con $\overline{AD}$ bisectriz del $\angle BAC$, D sobre $\overline{BC}$.
Sea E un punto sobre $\overline{BC}$, tal que $BD = EC$. Por E se traza la recta l paralela a $\overline{AD}$ y considere un punto P sobre l y dentro del $\triangle ABC$. Sea G el punto donde $\overleftrightarrow{BP}$ corta al lado $\overline{AC}$ y sea F el punto donde $\overleftrightarrow{CP}$ corta al lado $\overline{AB}$. Demuestre que $BF = CG$.

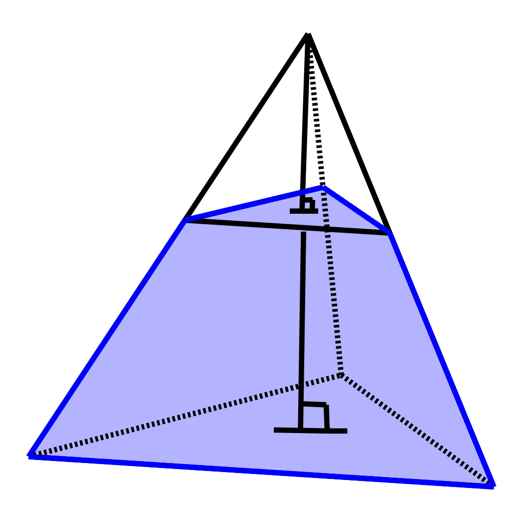
(N) Problema 3 (día 1)
El siguiente ejercicio propuesto es uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 1.

3.3.10 En la figura adjunta, el punto C es el centro de la circunferencia, $\overline{AB}$ es tangente a la circunferencia, $P - C - P'$ y $\overline{AC} \perp \overline{PP'}$. Si $AT = 2$ cm. y $AB = 4$ cm, determine BQ.

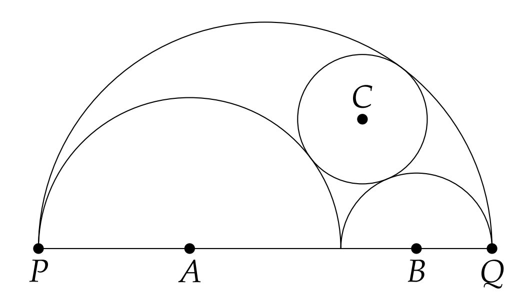


Ⓝ Problema 6 (día 2)
El siguiente ejercicio propuesto es uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 2.

3.3.11 Las cuatro caras de una pirámide triangular recta son triángulos equiláteros cuya arista mide 3 dm. Suponga que la pirámide es hueca, que descansa sobre una de sus caras en una superficie horizontal (ver figura adjunta) y que en su interior hay 2 dm^3 de agua. Determine la altura que alcanza el líquido en el interior de la pirámide.



3.3.12 En la figura adjunta, los semicírculos con centros A y B tienen radios 4 y 2, respectivamente. Además, son tangentes interiormente al círculo de diámetro $\overline{PQ}$. También, los semicírculos con centros A y B son tangentes externamente entre ellos. El círculo con centro C. es tangente internamente al semicírculo con diámetro $\overline{PQ}$ y tangente externamente a los otros dos semicírculos. Determine el valor del radio del círculo con centro C.



3.3.4 Álgebra y Funciones

Ejemplo 3.16

Si $x \in \mathbb{R} - \{-7\}$, determine el menor valor de la expresión $\dfrac{2x^2+98}{(x+7)^2}$.

Solución:
Completando cuadrados

$$\frac{2x^2+98}{(x+7)^2} = \frac{2(x^2+14x-14x+49)}{(x+7)^2} = \frac{2(x+7)^2}{(x+7)^2} - \frac{28x}{(x+7)^2} = 2 - \frac{28x}{(x+7)^2}$$

Por otro lado, como $0 \leq (x-7)^2$ se tiene que $0 \leq x^2 - 14x + 49$, es decir

$$28x \leq x^2 + 14x + 49 = (x+7)^2$$

Por lo tanto $\dfrac{28x}{(x+7)^2} \leq 1$

Así, $\dfrac{2x^2+98}{(x+7)^2} = 2 - \dfrac{28x}{(x+7)^2} \geq 2 - 1 = 1$

Ejemplo 3.17

Determine la suma de las raíces reales de la ecuación $x^2 - 8x + 20 = 3\sqrt{x^2 - 8x + 30}$

Solución:
Sea $u = x^2 - 8x + 20$. Entonces

$$\begin{aligned} u = 3\sqrt{u+10} &\Rightarrow u^2 = 9(u+10) \\ &\Rightarrow u^2 - 9u - 90 = 0 \\ &\Rightarrow u = -6 \quad \text{o} \quad u = 15 \end{aligned}$$

Como u debe ser mayor o igual que cero entonces se descarta $u = -6$. Para $u = 15$ se tiene que

$$\begin{aligned} x^2 - 8x + 20 = 15 &\Rightarrow x^2 - 8x + 5 = 0 \\ &\Rightarrow x = 4 - \sqrt{11} \quad \text{o} \quad 4 + \sqrt{11} \end{aligned}$$

Es decir, las raíces reales de la ecuación son $x_1 = 4 - \sqrt{11}$ y $x_2 = 4 + \sqrt{11}$, luego, $x_1 + x_2 = 4 - \sqrt{11} + 4 + \sqrt{11} = 8$.

N Problema 4 (día 2)
El siguiente ejemplo resuelto es uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 2.

Ejemplo 3.18

Determine si existe una función $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ que cumpla que para todo $n \in \mathbb{N}^*$,

$$10^{f(n)} < 10n + 1 < 10^{f(n)+1}$$

Justifique su respuesta.
Nota: $\mathbb{N}^*$ denota el conjunto de enteros positivos.

Solución:
Asuma que n tiene k dígitos, entonces $n = d_1 d_2 \ldots d_k$, y por ende $10n + 1$ tiene $k + 1$ dígitos, $10n + 1 = d_1 d_2 \ldots d_k 1$; es decir:

$$10^k < 10n + 1 < 10^{k+1}$$

Basta con considerar $f(n)$ como el número de dígitos del número n (puede responderse también que es la parte entera del logaritmo en base 10 de n).

3.3.13 Considere $f(n,m)$ el número de secuencias finitas de 1's y 0's tal que cada secuencia empieza en 0, tiene exactamente n 0's y m 1's, y no hay tres 0's o tres 1's consecutivos. Demuestre que si $m, n > 1$, entonces

$$f(n,m) = f(n-1,m-1) + f(n-1,m-2) + f(n-2,m-1) + f(n-2,m-2)$$

Ejemplo 3.19

Considere una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumple las siguientes dos propiedades: f es periódica de periodo 5 (es decir, para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x+5) = f(x)$), y al restringir f al intervalo $[-2,3[$, f coincide con x^2. Determine el valor de $f(2018)$

Solución:
Por la segunda propiedad, se tiene que para todo $x \in [-2,3[, f(x) = x^2$, en particular $f(-2) = 4$
Por la primera propiedad, $f(-2) = f(3) = f(3+5k)$, por lo que

$$f(2018) = f(3 + 2015) = f(3 + 5 \cdot 403) = f(3) = 4$$



Problema 2 (día 1)
El siguiente ejemplo resuelto es uno de los tres problemas que conformaron la prueba del día 1.

Ejemplo 3.20

Sean a, b, c y d números reales. Las seis sumas de dos números distintos de los cuatro anteriores dan como resultado 117, 510, 411, 252, x y y, sin orden en particular.
Determine el máximo valor posible de $x+y$.

Solución:
Observe que las sumas $(a+b)+(c+d)$, $(a+c)+(b+d)$, $(a+d)+(b+c)$ tienen todas el mismo valor. Esto significa que es posible agrupar los seis valores 117, 510, 411, 252, x y y en pares, de modo que las sumas sean todas iguales.
No es posible agrupar en pares los números 117, 510, 411, 252, de modo que se cumpla lo anterior. Esto significa que x y y no forman uno de estos pares, entonces existen dos de los números conocidos que forman un par, y los otros dos forman pares con x y y respectivamente.
Sea S el resultado de la suma común, entonces al sumar las seis cantidades el resultado debe ser igual a $3S$. Este total es $117+510+411+252+x+y=1290+x+y=3S$.
Luego, $x+y=3S-1290$, y entonces maximizar $x+y$ es equivalente a maximizar S. Como S es igual a la suma de dos de los valores 117, 510, 411, 252, entonces lo más grande que puede ser S es $510+411=921$, en cuyo caso $x+y=3S-1290=3\cdot 921-1290=1473$. Una solución posible, suponiendo que $a<b<c<d$, se puede obtener al plantear el sistema

$$\begin{cases} a+b=117 \\ a+c=252 \\ b+c=411 \\ a+d=510 \end{cases}$$

cuya solución es $a=-21$, $b=138$, $c=273$ y $d=531$.

Capítulo 4

Solución de los ejercicios

Soluciones del Capítulo 1

1.1.1 Resolviendo las operaciones que quedan, se obtienen los resultados que se muestran en la figura adjunta.

1		3	
4	3		1
3	4	1	
2	1		

El único número faltante de la segunda columna es 2 y, por lo tanto, el último número en la primera fila es 4.
Además, el único número faltante en la tercera fila es también 2, por lo que esto colocaría en la última columna los números 2 y 4 (y el 1 ya presente).

Por lo tanto, el único número faltante en la última columna es 3, y la única opción que corresponde a dicho resultado es $2+1$ en la opción (d).

1.1.2 Toma seis perlas del lado izquierdo (lleva dos oscuras y cuatro claras) y seis perlas del lado derecho (tres oscuras y tres claras), para un total de siete perlas claras; opción (d) es la correcta.

1.1.3 Se tiene que 120% de 30 es $\dfrac{120 \cdot 30}{100} = 36$.
Admás, 130% de 20 es $\dfrac{130 \cdot 20}{100} = 26$.
Luego, $36 - 26 = 10$ es la diferencia y (d) es la opción correcta.

1.1.4 Como 20% de los objetos son anillos, 80% son monedas, de las cuales 40% son de plata y, por lo tanto, 60% de las monedas son de oro.
Es decir, que 60% de 80% (que corresponde a $0{,}60 \cdot 80\% = 48\%$) de los objetos son monedas de oro.
Entonces, 48% del total es igual 156, lo que implica que en total hay 325 objetos.
Finalmente, $20\% \cdot 325 = 65$ es la cantidad de anillos en la caja, por lo que (a) es la opción correcta.

1.1.5 Como $P(Blanca) = 0{,}15 = \dfrac{15}{100} = \dfrac{3}{20} = \dfrac{6}{40}$, significa que hay 40 bolas en total.
Además, como hay 6 blancas y 16 rojas, entonces hay 18 azules.

Por lo tanto, $P(Azul) = \dfrac{18}{40} = 0{,}45$ y (b) es la opción correcta.

1.1.6 ↩ 👁 El sábado lee 25 páginas, los siguientes 6 días lee 36 páginas; es decir, cada 7 días lee 61 páginas. Luego, en 21 días lee 183 páginas, el día 22 que será sábado puede leer hasta 25 páginas más, pero solo le restan 17 páginas del libro. La opción (a) es la correcta.

1.1.7 ↩ 👁 La cantidad total de horas trabajadas es $6 \cdot 10 \cdot 8 = 480$. En el segundo caso debe ocuparse la misma cantidad de horas, pues es el mismo muro. Si a es la cantidad de trabajadores, entonces $a \cdot 5 \cdot 4 = 480$; es decir, $a = 24$ y (c) es la opción correcta.

1.1.8 ↩ 👁 Dado que $\dfrac{y}{z} = \dfrac{4}{5}$, entonces $\dfrac{z}{y} = \dfrac{5}{4}$; luego $\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{z}{y} \cdot \dfrac{x}{y} = \dfrac{x^2 z}{y^3} = \dfrac{6}{5} \cdot \dfrac{5}{4} \cdot \dfrac{6}{5} = \dfrac{36}{20} = \dfrac{9}{5}$ que es la opción (c).

1.1.9 ↩ 👁 Note que seis gallinas tienen en total 12 patas, y tres cerdos también tienen 12 patas, para un total de 24 patas.
Eso quiere decir que hay 20 patas entre todas las vacas, cada una tiene cuatro patas, por lo que hay cinco vacas y (b) es la respuesta correcta.

1.1.10 ↩ 👁 Se procede a calcular el $m.c.m.(15,12) = 60$. Entonces Carlos y María llegaron juntos por primera vez a la meta después de 60 minutos. Carlos en 60 minutos recorre 28 vueltas de la pista, por lo que (b) es la respuesta correcta.

1.1.11 ↩ 👁 Como $\triangle ABC$ isósceles y acutángulo y $m\angle ACB = 40°$, entonces $m\angle ABC = m\angle BAC = 70°$. Por otro lado, se tiene que $A - M - C$ con $AM = AB$, entonces el $\triangle ABM$ es isósceles.
Se sabe que $m\angle BAM = 70°$, entonces $m\angle AMB = m\angle ABM = 55°$. Como $m\angle ABC = m\angle ABM + m\angle MBC$, $70° = 55° + m\angle MBC$ y se concluye que $m\angle MBC = 15°$ y (a) la opción correcta.

1.1.12 ↩ 👁 Dado que $\triangle ABC$ es isósceles, se cumple que $m\angle ABC = m\angle BCA$. Luego, como $\overline{AM} \perp \overline{BC}$, entonces los triángulos $\triangle AMB$ y $\triangle AMC$ son triángulos rectángulos.
Así, $m\angle MAB + m\angle ABC = 90°$ y se cumple que $m\angle MAB + m\angle BCA = 90°$, siendo (b) la opción correcta.

1.1.13 ↩ 👁 Se obtiene el área de los triángulos no sombreados. Cada triángulo no sombreado tiene como base la tercera parte de la base del $\triangle ABC$ y como altura la tercera parte de la altura del $\triangle ABC$, por lo que el área de cada uno de estos triángulos corresponde a $\dfrac{1}{9}$ del área del $\triangle ABC = \dfrac{1}{9} \cdot 18 = 2\ \text{m}^2$.
Como son tres triángulos sin sombrear, el área de esa región no sombreada es $6\ \text{m}^2$.
Por lo tanto, el área de la región sombreada es $18 - 6 = 12\ \text{m}^2$ que corresponde con la opción (c).

1.1.14 ↩ 👁 Al aplicar la desigualdad triangular a los triángulos $\triangle ABN$ y $\triangle MNC$ se obtienen las siguientes desigualdades, respectivamente, $AB + BN > AN$ y $MN + NC > MC$.
A sumar los respectivos lados de las desigualdades se obtiene $AB + BN + MN + NC > AN + MC$, pero $BC = BN + NC$ y $AN = AM + MN$, entonces $AB + BC > AM + MC$ que corresponde con la opción (a).

1.2.1 ↩ 👁 Con el dado dos, la probabilidad de que ambas caras sean iguales es $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{6} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{6} = \dfrac{1}{2}$.

Con el dado tres, la probabilidad de que ambas caras sean iguales es $\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$.
Por lo tanto, la opción (c) es la correcta, ya que con ambos dados se tiene la misma probabilidad.

1.2.2 Como yo soy la mamá de mi hija, entonces yo soy la hija de Tiffany, opción (b).

1.2.3 Desde la vista Sur se observan, de frente, los edificios 3 y 4, el 3 a la izquierda y el 4 a la derecha. Se puede ver que el edificio 3 tiene dos pisos con fachada cuadriculada y detrás de él se observa un piso más del edificio 1, el cual debe tener 3 pisos con fachada de ladrillos horizontales.
Desde la vista Norte se observan, de frente, los edificios 1 y 2, el 1 a la derecha y el 2 a la izquierda. El edificio 1 tiene tres pisos con fachada de ladrillos horizontales, como es el más alto no se observa nada del edificio 3 que está detrás de él. En cambio, el edificio 2 solo tiene un piso con fachada de puntos, y se observa detrás de él el otro piso del edificio 4 de 2 pisos con fachada de ladrillos diagonales.

Entonces la opción falsa es la (d), pues la fachada de ese edificio es de ladrillos horizontales.

1.2.4 Como se pregunta por el dígito de la unidades, únicamente interesa el último dígito en dicho procedimiento. Por lo tanto.
•) $8 \cdot 2 + 1 \to xxx7$
•) $7 \cdot 2 + 1 \to xxx5$
•) $5 \cdot 2 + 1 \to xxx1$
•) $1 \cdot 2 + 1 \to xxx3$
•) $3 \cdot 2 + 1 \to xxx7$

Como se puede apreciar, la secuencia se repite cada 4, y como $2018 = 4 \cdot 504 + 2$, quiere decir el el último número escrito termina en 5 y (c) es la opción correcta.

1.2.5 Si a es un entero, la colocación de los números en la cuadrícula queda como se muestra en la figura adjunta.

Luego, $9a + 36 = 2277 \Rightarrow a = 249$ y la suma de los elementos de la tercera fila es $a + 5 + a + 6 + a + 8 = 254 + 255 + 257 = 766$. Así, (c) es la opción correcta.

a	a+1	a+2
a+4	a+3	a+7
a+5	a+6	a+8

1.2.6 Si m es la cantidad de pasos que da el ratón y n la cantidad de pasos que da el gato, y si r representa la distancia de un paso del ratón y g la distancia de un paso del gato, se quiere que $98r + mr = ng$.
Además, de la información $3m = 5n$ y $9r = 4g$, sustituyendo y resolviendo la ecuación se tiene que $n = 168$, y (c) es la opción correcta.

1.2.7 Observe que N es divisible por 9, porque la suma de los dígitos de N es

$$\begin{aligned}(1+2+3+4+5+6+7+8+9)+(1+2+3+4+5+6+7+8)+9 &= 45+36+9\\ &= 90\end{aligned}$$

que es divisible por 9. Por otro lado, observe que $N-2\cdot 9$ es divisible por 5 y por 9. Entonces, $N-18$ es divisible por 45; así, el residuo de la división de N por 45 es 18 y (d) la opción correcta.

1.2.8 Note que la descomposición de 2018 en números primos es $2018 = 2\cdot 1009$. Así, las parejas buscadas son 2 y 1009, 2 y 2018, 1009 y 2018, 1 y 2018, y finalmente 2018 y 2018. En total, cinco parejas y (c) es la opción correcta.

1.2.9 Como Leonardo es 25 % más rápido, significa que cuando German da una vuelta, entonces Leonardo ya corrió $400\cdot 0{,}25 = 100$ metros más. Luego, cuando German dé cuatro vueltas, entonces Leonardo habrá corrido $4\cdot 400\cdot 0{,}25 = 400$ metros más; es decir, una vuelta más (en ese momento lo alcanzará por primera vez). Por lo que son cinco las vueltas que ha dado Leonardo al alcanzar a German, y (c) la opción correcta.

1.2.10 Observe que los números se pueden escribir como

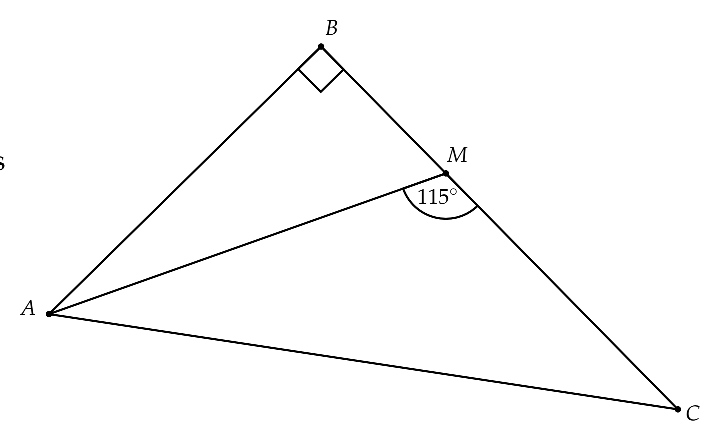
$$1\,000\,000-2,\quad 10\,000\,000-2,\quad 100\,000\,000-2,\quad \ldots \quad , \quad 1\underbrace{000\cdots0}_{2019 \text{ veces}}-2$$

La sucesión tiene $2018-4 = 2014$ números. Al hacer la suma, cada 1 ocupa una posición diferente, y el último 1 a la derecha está en la posición de las unidades de millón, la resta al final es $(2018-4)\cdot 2 = 4028$; es decir,

$$S = \underbrace{111111\cdots 11}_{2014 \text{ veces}}000000 - 4028 = \underbrace{111111\cdots 11}_{2013 \text{ veces}}0995972$$

de donde la suma de los dígitos D está dada por $D = 2013+3\cdot 9+5+7+2 = 2054$, y (d) la opción correcta

1.2.11 Considere la siguiente figura.



$m\angle BMA = 180° - 115° = 65°$.

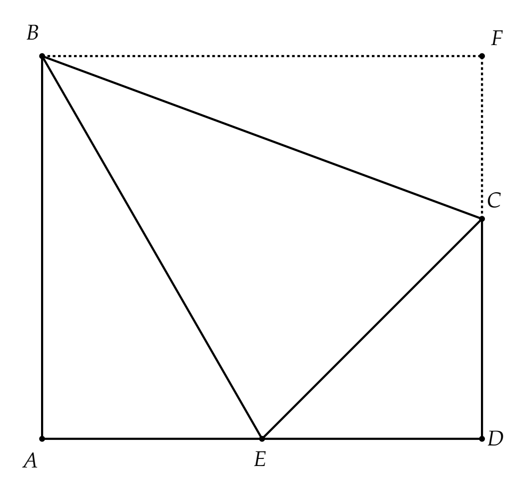
Como el $\triangle ABC$ es recto en B, entonces $m\angle BAM = 25°$.

$\overline{AM}$ es bisectriz del $\angle BAC$.

Por lo tanto, $m\angle MAC = 25°$ y $m\angle MCA = 40°$.

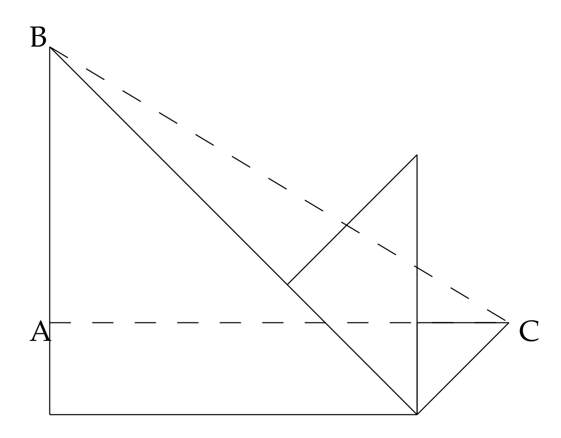
1.2.12 Consideremos la siguiente figura

Sea $AD = AB = x$. Como E es el punto medio de AD entonces $AE = ED = \frac{x}{2}$. Luego,
$(ABE) = \frac{\frac{x}{2} \cdot x}{2} = \frac{x^2}{4}$, $(BFC) = \frac{\frac{x}{2} \cdot x}{2} = \frac{x^2}{4}$ y $(EDC) = \frac{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2}{8}$
Por otra parte, $(ABFD) = x^2$
Así, $(EBC) = x^2 - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{8} = \frac{3x^2}{8}$.



1.2.13 Por semajanza de triángulos, la relación entre las hipotenusas se mantiene entre los catetos, por lo que el cateto del triángulo mediano mide $\frac{1}{2}$ y el del triángulo pequeño $\frac{1}{4}$.

Entonces la figura siguiente, $AB = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $AC = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$



Aplicando el Teorema de Pitágoras se tiene que $BC = \sqrt{\frac{34}{16}} = \frac{\sqrt{34}}{4}$

1.2.14

$$\begin{aligned}\frac{2018 \times 2{,}018}{20{,}18 \times 201{,}8} &= \frac{2018 \times \frac{2018}{1000}}{\frac{2018}{100} \times \frac{2018}{10}} \\ &= \frac{\frac{2018^2}{1000}}{\frac{2018^2}{100 \times 10}} \\ &= 1\end{aligned}$$

1.2.15 Sean x,y,z las cantidades de monedas que tienen inicialmente Christian, Alexander y Leonel respectivamente. Es claro que

$$x+y+z=435$$

De acuerdo con la información, después de haber gastado cierta cantidad de monedas cada uno se tiene que

$$\frac{1}{2}x=\frac{2}{3}y=\frac{3}{4}z,$$

despejando y y z en términos de x y sustituyendo en la primera ecuación se tiene que

$$x+\frac{3}{4}x+\frac{2}{3}x=435,$$

y resolviendo se obtiene que $x=180$, y entonces $y=135$.

1.3.1 $\dfrac{1\text{ día}}{1\text{ año}}=\dfrac{24\text{ horas}}{365\text{ días}}=\dfrac{1440\text{ minutos}}{8760\text{ horas}}=\dfrac{x\text{ minutos}}{8\text{ horas}}$

$\Rightarrow x=\dfrac{(1440\text{ minutos})\,(8\text{ horas})}{8760\text{ horas}}=\dfrac{96}{73}\text{ minutos}$

$96\div 73\approx 1{,}3$ minutos

1.3.2 Los penales que fueron anotados son 38 %.

Si x es la cantidad de penales lanzados, entonces $\dfrac{32}{100}x=\dfrac{8}{25}x$, $\dfrac{30}{100}x=\dfrac{3}{10}x$ y $\dfrac{38}{100}x=\dfrac{19}{50}x$ deben ser enteros, de donde el mínimo valor de x es 50.

1.3.3 Numeremos las filas y las columnas de 1 a 4 y sea C_{ij} la casilla que se encuentra en la fila i y en la columna j.

Para seleccionar las dos casillas de la primera fila debe escoger 2 de 4, es decir $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ maneras.

Supongamos que se escogen C_{11} y C_{12} (los otros casos son similares). Si en la fila 2 se marcan C_{21} y C_{22}, obligatoriamente se debe completar el marcado con C_{33}, C_{34}, C_{43} y C_{42}.

Si, por otra parte, en la fila 2 se marcan C_{23} y C_{24}, en la fila 3 se puede marcar cualquier par de casillas (hay 6 posibilidades) y quedan determinadas las dos casillas de la fila 4.

Si en la fila 2 se escogen C_{21} y C_{23}, hay que marcar necesariamente C_{34} y C_{44} en la cuarta columna, y se puede completar de dos maneras: con C_{32} y C_{43} o con C_{33} y C_{42}.

El mismo razonamiento se aplica si en la fila 2 se escogen las casillas C_{21} y C_{24}, C_{22} y C_{23} o C_{22} y C_{24}.

En definitiva resultan $6\,(1+6+2\cdot 4)=6\cdot 15=90$ maneras.

1.3.4 Primero la cantidad de formas de escoger a las 4 personas a las que le llegó bien la carta es de 7 escoger 4, es decir $\dbinom{7}{4}=\dfrac{7!}{4!\cdot 3!}=35$.

A las restantes 3 hay 2 formas de entregarles las cartas de manera que ninguna haya recibido la carta correcta. Por tanto hay en total 70 posibles formas.

1.3.5 ↩ 👁 Debe cumplirse que $1280 = m(n+1)n^n$. Además $1280 = 2^8 \cdot 5 = 2^{2\cdot 4} \cdot 5 = \left(2^2\right)^4 \cdot 5 = 4^4 \cdot (4+1)$. Lo que significa que $n = 4$ y $m = 1$.

1.3.6 ↩ 👁 Nótese que $AN = NC$, y como los triángulos $\triangle ANB$ y $\triangle NCB$ tienen la misma altura y la misma base, entonces tienen la misma área, por lo que $x + 3 = 6 + 3$; es decir, $x = 6$.

1.3.7 ↩ 👁 $(ACDE) = \frac{1}{2}(24+15)\cdot 12 = 234$, $(OBCD) = 234 - ((DEA) + (AOB))$

$\triangle EOD \sim \triangle BOA(A-A)$ dado que $\angle EOD \cong \angle AOB$ por ser ángulos opuestos por el vértice; $\angle EDA \cong \angle DAC$ por ser ángulos alternos internos entre paralelas.

Sea h la altura del $\triangle EDO$ trazada desde el vértice O, se sigue que la medida de la altura del $\triangle AOB$, trazada desde el vértice O es $12 - h$ y de la semejanza se concluye que:

$$\frac{15}{12} = \frac{h}{12-h} \quad \Rightarrow h = \frac{20}{3} \quad 12 - h = \frac{16}{3}$$

$$(DEA) = \frac{15\cdot 12}{2} = 90; \triangle AOB = \frac{12\cdot \frac{16}{3}}{2} = 32$$

$$\therefore (OBCD) = 234 - (90+32) = 234 - 122 = 112$$

1.3.8 ↩ 👁 Sea $AE = x$ y $m\angle DAC = \alpha$; así, $EC = 3x$ y $m\angle ACB = 90^\circ - 2\alpha$, por lo que $m\angle ABC = 90^\circ$ y $\triangle ABC \sim \triangle EDC$ con razón de semejanza $\dfrac{4}{3}$.

Por Pitágoras $DC = 2\sqrt{2}x$, por semejanza $BD = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}x$ y $AB = \dfrac{4}{3}x$.

Por Pitágoras $AD = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}x$, de donde $x = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$. Así, $AB = \sqrt{2}$ y $BC = 4$. Por lo tanto, $(ABC) = 2\sqrt{2}$.

1.3.9 ↩ 👁 Al sumar miembro a miembro las dos ecuaciones, se tiene $(1+a)x = b \Rightarrow x = \dfrac{b}{1+a}$ siempre que $a \neq -1$ independientemente del valor de b. En ese caso, habrá solución única $x = \dfrac{b}{1+a}$, $y = \dfrac{-ab}{1+a}$.

1.3.10 ↩ 👁 Despejando la y en la primera ecuación tenemos $y = \sqrt[4]{\dfrac{a}{x^3}}$. Sustituyendola en la segunda,

$$x^5 \cdot \left(\sqrt[4]{\frac{a}{x^3}}\right)^6 = b \Rightarrow x^{5-\frac{3}{4}\cdot 6} = \frac{b}{\sqrt[2]{a^3}} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{b}{\sqrt[2]{a^3}} \Rightarrow x = \frac{b^2}{a^3}$$

Soluciones del Capítulo 2

2.1.1 ↩ 👁 Vamos a calcular la probabilidad de que el producto de las cifras no sea múltiplo de 3, es decir, de que ninguna de las cifras sea múltiplo de 3.

La probabilidad de que la cifra de los millares no sea múltiplo de 3 es igual a $\frac{6}{9}$ ya que hay seis elecciones $\{1,2,4,5,7,8\}$ que no son múltiplos de 3 de nueve candidatos posibles.

No obstante, para las cifras de las centenas, decenas y unidades la probabilidad se reduce a $\frac{6}{10}$ ya que también cabe la posibilidad de que tomen el valor 0.

Como la elección de los distintos dígitos es independiente, la probabilidad de que el producto de las cifras no sea múltiplo de 3 es igual al producto de las probabilidades: $\frac{6}{9}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{6}{10}\cdot\frac{6}{10}=\frac{18}{125}$.

La probabilidad de que dicho producto sí sea múltiplo de 3 es la complementaria $1-\frac{18}{125}=\frac{107}{125}$, que es el número buscado.

2.1.2 Para que Ana gane tendrá que mencionar un número que tenga 3 factores primos o 6 factores primos.

Así, los números que cumplen dicha característica son:

$52 = 2\cdot 2\cdot 13$, $63 = 3\cdot 3\cdot 7$, $64 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2$, $66 = 2\cdot 3\cdot 11$, $68 = 2\cdot 2\cdot 17$, $70 = 2\cdot 5\cdot 7$, $75 = 3\cdot 5\cdot 5$, $76 = 2\cdot 2\cdot 19$, $78 = 2\cdot 3\cdot 13$, $92 = 2\cdot 2\cdot 23$, $96 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3$, $98 = 2\cdot 7\cdot 7$, $99 = 3\cdot 3\cdot 11$

Como Verónica elige el siguiente número consecutivo y gana, entonces Ana tuvo que elegir 63, 75 o 98.

2.1.3 El color rojo se emite cada 16 segundos.

El color verde se emite cada 45 seguntos.

El color blanco se emite cada 2 minutos y 20 segundos; es decir, cada 140 segundos.

Calculamos el m.c.m de 16 y 140.

16	140	2
8	70	2
4	35	2
2	35	2
1	35	5
1	7	7
1	1	1

Los colores rojo y blanco coiniciden cada 560 segundos; es decir, cada 9 minutos y 20 segundos.

2.1.4 Nótese que lo más que puede medir el cuadrado en cuestión (de hecho, exáctamente lo único que puede medir) es la longitud menor del rectángulo restante. Entonces, si se quita un cuadrado (1) de 84×84, la pieza restante mide 108×84. De aquí se quita un cuadrado (2) de 84×84, y queda un rectángulo de 84×24. Se quita un cuadrado (3) de 24×24, quedando 60×24, se quita un cuadrado (4) de 24×24, quedando 36×24, se quita un cuadrado (5) de 24×24, quedando 12×24, de donde se sacan dos cuadrados de 12×12.

84 84 12 12

6 7 12

5 24

84 1 2

4 24

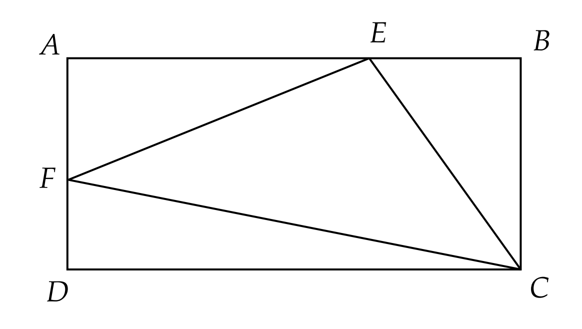
3 24

2.1.5 Contando por cada tamaño se tiene que

- Existe un cuadrado de tamaño 1×1.
- Existen 4 cuadrados de tamaño 2×2.
- Existen 9 cuadrados de tamaño 3×3.
- Existen 4 cuadrados de tamaño 4×4.
- Existe un cuadrado de tamaño 5×5.

Por lo tanto, el total es $1+4+9+4+1 = 19$.

2.1.6 Considere la siguiente figura.
$m\angle BEC + m\angle CEF + m\angle FEA = 180^\circ$ y $m\angle DFC + m\angle CFE + m\angle EFA = 180^\circ$



Luego, como $\angle BEC \cong \angle FEC$ y $\angle EFC \cong \angle DFC$, entonces $2m\angle CEF + m\angle AEF = 180^\circ$ y $2m\angle EFC + m\angle EFA = 180^\circ$

Ahora,

$$2m\angle CEF + m\angle AEF + 2m\angle EFC + m\angle EFA = 360^\circ$$

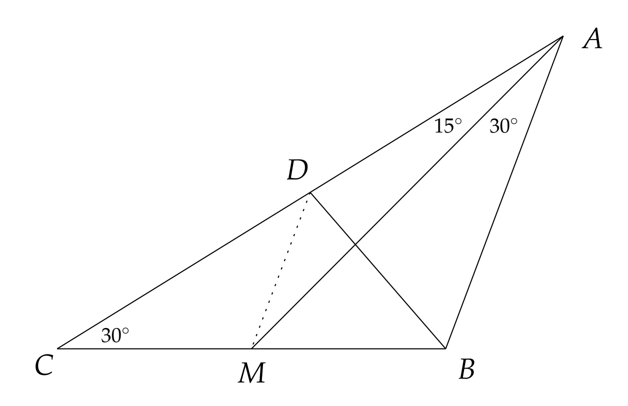
$$2m\angle CEF + 2m\angle EFC = 270^\circ$$

$$m\angle CEF + m\angle EFC = 135^\circ$$

Así, $m\angle ECF = 45^\circ$. Finalmente, $m\angle BCE + m\angle DCF = 90^\circ - m\angle ECF = 45^\circ$

2.1.7 El $\triangle DCM$ es isósceles, ya que $DM = MC$, por lo que $m\angle CDM = 30^\circ$; además, $\overline{DB} \perp \overline{AC} \Rightarrow m\angle BDM = 60^\circ$.

Dado que el $\triangle MDB$ también es isósceles pues $DM = MB$, se tiene que $m\angle MBD = 60°$; así, el $\triangle DMB$ es equilátero. Dado que el triángulo rectángulo $\triangle ADB$ posee un ángulo agudo de medida $45°$, el otro ángulo agudo también mide $45°$ y $AD = DB$; de esta manera, $AD = BD = DM = MB$.
En el triángulo isósceles $\triangle ADM$, $AD = DM$ y $m\angle ADM = 90° + 60° = 150°$, por lo que los otros dos ángulos de este triángulo miden lo mismo, cada uno mide $15°$.



Por último, en el $\triangle DMB$ (equilátero) se tiene que $m\angle AMB = 60° - m\angle DMA = 60° - 15° = 45°$.

2.1.8 Observe que $\triangle ABP$ y $\triangle BPC$ tienen la misma altura, así que la razón entre sus áreas es igual a la razón de sus bases.

Entonces $\dfrac{(ABP)}{(BPC)} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2} \implies (BPC) = 2(ABP)$

De igual manera

$$\frac{(ABP)}{(APD)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \implies (APD) = \frac{4}{3}(ABP)$$

y

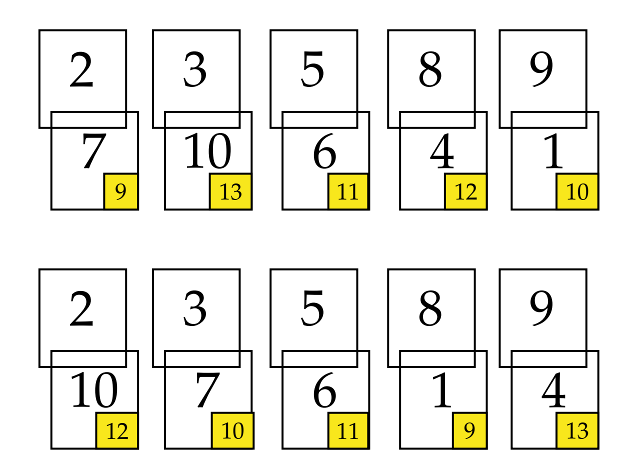
$$\frac{(APD)}{(DPC)} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \implies (DPC) = 2(APD) = \frac{8}{3}(ABP)$$

Así,

$$\begin{aligned}
(ABCD) &= (ABP) + (BPC) + (APD) + (DPC) \\
&= (ABP) + 2(ABP) + \frac{4}{3}(ABP) + \frac{8}{3}(ABP) \\
&= 7(ABP) \\
\Rightarrow \frac{(ABCD)}{(ABP)} &= 7
\end{aligned}$$

2.2.1 Como las tarjetas 2 y 9 ya están ocupadas, la suma que cada una forme con su pareja no puede ser 11.

Lo mismo ocurre con la 3 y la 8, por lo que concluimos que la tarjeta que se empareja con la 5 es la 6.
Entonces la suma 9 solo se puede lograr emparejando 7 con 2 o 1 con 8.
En el primer caso, 10 debe aparearse con 3, 4 con 8 y 1 con 9. En el segundo caso, 10 debe emparejarse con 2, 7 con 3 y 4 con 9. Por lo que solo hay dos opciones posibles para emparejar las tarjetas.



2.2.2 Ambas son verdaderas.
Considerando $a = b - 1$ y $c = b + 1$, tenemos que $R = b^2 - (b+1)^2 + (b-1)^2 = b(b-4)$. Como dos de los tres números deben ser impares, es claro que b es par.
La primara opción dice que b es divisible por 3, pero además es par, por consiguiente es múltiplo de 6 es decir $b = 6k$, con k entero.
Por tanto, $R = b(b-4) = 6k(6k-4) = 12k(3k-2)$ y la opción I es verdadera.
Por otro lado, la opción II dice que b es divisible por 4; es decir, es de la forma $b = 4k$, por consiguiente $R = b(b-4) = 4k(4k-4) = 16k(k-1)$.
Pero como $k(k-1)$ es par entonces $k(k-1) = 2s$, con s entero, por tanto $R = 32s$, lo que implica que la opción II es verdadera.

2.2.3 Evaluando $2a + b$ en la ecuación: $(2a+b)^2 + a(2a+b) + b = 0 \Rightarrow b^2 + (5a+1)b + 6a^2 = 0$. Viendo esta como una ecuación cuadrática en b, se tiene que su discriminante Δ está dado por $\Delta = (5a+1)^2 - 4 \cdot 6a^2 = a^2 + 10a + 1 = (a+5)^2 - 24 = k^2$, donde $k \in \mathbb{N}$.
Así, $(a+5-k)(a+5+k) = 24$, como $a+5-k$ y $a+5+k$ tienen la misma paridad, entonces las opciones que tenemos es que estas sean iguales a 2 y 12, -2 y -12, 4 y 6, -4 y -6, de donde dan 4 valores para a que son 0, 2, -10 y -12, y al cambiarlos en la ecuación en términos de b dan cada ecuación 2 valores enteros diferentes de b, de donde hay 8 pares distintos que cumplen lo requerido.

2.2.4 Sean $x = m\angle DAC$, $a = m\angle ABC = m\angle ACB$ ($\triangle ABC$ isósceles con $AB = AC$), $b = m\angle ADE = m\angle AED$ ($\triangle ADE$ isósceles con $AD = AE$).
Por suma de medidas de ángulos internos en el $\triangle ABC$ se tiene que $2a + x + 30^\circ = 180^\circ$
Por suma de medidas de ángulos internos en el $\triangle ADE$ se tiene que $2b + x = 180^\circ$
Entonces igualando tenemos:

$$2a + x + 30^\circ = 2b + x \Rightarrow 30^\circ = 2b - 2a \Rightarrow 15^\circ = b - a$$

Por teorema de la medida del ángulo externo en el $\triangle DEC$, tenemos:

$$b = a + m\angle EDC \Rightarrow b - a = m\angle EDC \Rightarrow 15^\circ = m\angle EDC$$

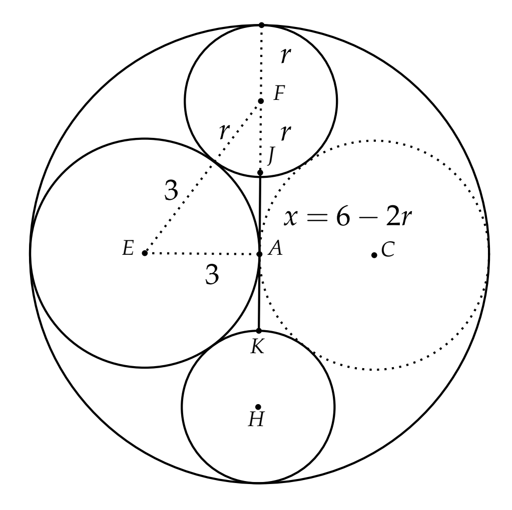
2.2.5 Sea r al radio del círculo de centro F.

Sea x la longitud de $\overline{JA}$.
Como el círculo mayor tiene radio 6, el círculo de centro E tiene radio 3 y, además, $x = 6 - 2r$, como se muestra en la figura.
Aplicando el Teorema de Pitágoras al $\triangle EAF$, se tiene:

$$(r+3)^2 = 3^2 + (6-r)^2$$

$$r = 2$$

Por lo tanto $x = 6 - 2r = 2$ y JK es 4.



2.2.6 Al sumar miembro a miembro las dos ecuaciones, se obtiene $(1-\alpha)y = \alpha - 1 \Rightarrow y = \dfrac{\alpha - 1}{1-\alpha} = -1$, siempre que $\alpha \neq 1$ (con $\alpha = 1$ el sistema posee infinito número de soluciones).
Ahora, con $y = -1$, al sustituir en la primera ecuación después de despejar x, se obtiene $x^2 = y + 1 \Rightarrow x^2 = -1 + 1 = 0 \Rightarrow x = 0$.
Por lo tanto, si $\alpha \neq 1$, el sistema posee la única solución $(0, -1)$.

2.3.1 Note que si ya se tienen las tres letras escogidas solo existe una opción posible para ordenarlas. Como las letras pueden repetirse o no, se tienen tres casos para escogerlas: que sean todas distintas, que sean todas iguales, que hayan dos iguales y una distinta.
I Caso: Si son todas distintas, basta tomar 3 de 27.
Es decir, $\dbinom{27}{3} = \dfrac{27!}{3!\cdot 24!} = \dfrac{27\cdot 26\cdot 25\cdot 24!}{6\cdot 24!} = \dfrac{27\cdot 26\cdot 25}{6} = 9\cdot 13\cdot 25 = 2925.$
II Caso: Todas las letras repetidas son $\dbinom{27}{1} = 27$
III Caso: Dos repetidas y una diferente basta escoger 2 letras de las 27 y luego multiplicar por dos, pues una vez seleccionadas, cualquiera de las dos puede repetirse, es decir $2\dbinom{27}{2} = 702$
Por lo tanto la cantidad de nombres con estas características es $\dbinom{27}{3} + 2\dbinom{27}{2} + \dbinom{27}{1} = 3654.$

2.3.2 Sean a, b, c, d, e y f, respectivamente, las cantidades de monedas de 500, 100, 50, 25, 10 y 5. Se necesita que $a < b < c < d < e < f$ y que $a + b + c + d + e + f = 2018$.

Para obtener la mayor cantidad de dinero posible, debería haber la mayor cantidad posible de monedas de 500. La mejor forma de distribuir es que cada denominación menor tenga apenas una moneda más que las de la denominación inmediatamente mayor; es decir, lo ideal sería que

$$b = a+1,\ c = a+2,\ d = a+3,\ e = a+4,\ f = a+5$$

Pero $a + (a+1) + (a+2) + (a+3) + (a+4) + (a+5) = 6a + 15 = 2018 \Rightarrow a = 333.8\overline{3}$; es decir, $a \notin \mathbb{N}$

Tomando $a = 334$ se sobrepasa de 2018 monedas y tomando $a = 333$ se obtiene 2013 monedas, es decir, quedan 5 monedas por distribuir.

La siguiente denominación mayor (100) debería tener entonces una moneda más, lo que obliga a sumar una a cada una de las denominaciones menores (50, 25, 10 y 5).

Así, $a = 333, b = 335, c = 336, d = 337, e = 338$ y $f = 339$.

La cantidad de dinero total es

$$333 \cdot 500 + 335 \cdot 100 + 336 \cdot 50 + 337 \cdot 25 + 338 \cdot 10 + 339 \cdot 5 = 230\,300$$

2.3.3 N debe ser el producto de los primeros 11 primos.
Así. $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \mathbf{11} \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31$, que es divisible por 11, por lo que el residuo de N dividido entre 11 es 0.

2.3.4 Sea $F = \{1,2,3,\ldots,50\}$, se procede a dividir F en 7 subconjuntos $F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$ tales que todos los elementos de F_i tengan el mismo residuo i cuando son dividos por 7:
$F_0 = \{7,14,21,28,35,42,49\}$
$F_1 = \{1,8,15,22,29,36,43,50\}$
$F_2 = \{2,9,16,23,30,37,44\}$
$F_3 = \{3,10,17,24,31,38,45\}$
$F_4 = \{4,11,18,25,32,39,46\}$
$F_5 = \{5,12,19,26,33,40,47\}$
$F_6 = \{6,13,20,27,34,41,48\}$
Se puede observar que S puede contener a lo más un miembro de F_0, y si S contiene algún miembro de cualquiera de los otros subconjuntos, entonces este puede contener a todos los miembros de ese subconjunto. También, S no puede contener miembros de F_1 y F_6 al mismo tiempo , o F_2 y F_5, o F_3 y F_4. Como F_1 contiene 8 elementos y cada uno de los otros subconjuntos contienen 7 elementos, el subconjunto S más grande puede ser construido seleccionando un elemento de F_0, todos los elementos de F_1, todos los elementos de F_2 o F_5, todos los elementos que pueden ser de F_3 o F_4. Por lo tanto, el subconjunto S más grande contiene $1 + 8 + 7 + 7 = 23$ elementos.

2.3.5 Si $abcd$ corresponde con el año de nacimiento de su antepasado, se debe cumplir que

$$\begin{aligned} & abcd - dcba = 2018 \\ \Rightarrow\ & 1000a + 100b + 10c + d - 1000d - 100c - 10b - a = 2018 \\ \Rightarrow\ & 999a + 90b - 90c - 999d = 2018 \\ \Rightarrow\ & 999\,(a - d) + 90\,(b - c) = 2018 \\ \Rightarrow\ & 9\,(111\,(a - d) + 10\,(b - c)) = 2018 \end{aligned}$$

Pero lo anterior no es posible ya que 2018 no es múltiplo de 9.

Se tienen dos casos iniciales para el año de nacimiento del antepasado: $1abc$ o $0abc$.

I Caso: Año de nacimiento $1abc$.
$1abc - cba1 = 2018$ es imposible, porque para que se cumpla el valor en el dígito de las unidades, necesariamente $c = 9$, pero entonces $1ab9 - 9ba1 < 0 \neq 2018$.
Si $cba1 > 1abc$, $cba1 - 1abc = 2018$.
Para que se cumpla el valor en el dígito de las unidades, necesariamente $c = 3$, teniendo entonces

	M	C	D	U
	3	b	a	1
-	1	a	b	3
	2	0	1	8

Continuando con el proceso de la resta se tiene

	M	C	D	U
	3	b	$(a-1)$	11
-	1	a	b	3
	2	0	1	8

Si $a - 1 \neq 0$, en la casilla de las decenas se tiene $a - 1 - b = 1$, de donde $a = b + 2$; mientras que en la casilla de las centenas $b - a = 0$, de donde $a = b$, lo cual es imposible.
Si $a - 1 = 0$ entonces $b = 9$, pero $3911 - 1193 = 2718 \neq 2018$.
II Caso: Año de nacimiento $0abc$.
$0abc - cba0 = 2018$ es imposible, porque para que se cumpla el valor en el dígito de las unidades, necesariamente $c = 8$, pero entonces $0ab8 - 8ba0 < 0 \neq 2018$.
Para que $cba0 - 0abc = 2018$, se debe tener $c = 2$, teniendo entonces

	M	C	D	U
	2	b	a	0
-	0	a	b	2
	2	0	1	8

Continuando con el proceso de la resta se tiene

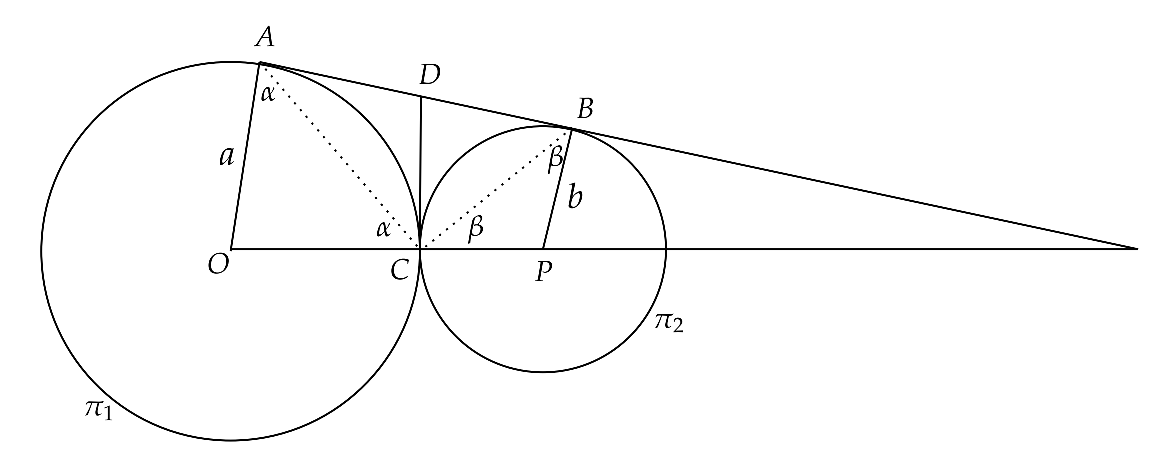
	M	C	D	U
	2	b	$(a-1)$	10
-	0	a	b	2
	2	0	1	8

Si $a - 1 \neq 0$, en la casilla de las decenas se tiene $a - 1 - b = 1$, de donde $a = b + 2$; mientras que en la casilla de las centenas $b - a = 0$, de donde $a = b$, lo cual es imposible.
Si $a - 1 = 0$ entonces $b = 9$, pero $2910 - 0192 = 2718 \neq 2018$.
Por lo tanto, el profesor Rolando tiene razón.

2.3.6 Nótese que el número no podría tener más de diez dígitos, y en dicho caso, se usarían todos los dígitos, y al ser la suma de los enteros entre 0 y 9 igual a 45, divisible por 3. Al ser el número

divisible entre 5 (al serlo por 15), entonces el último dígito es 0 o 5. Como se trata de un número par (al ser divisible por 8), se tiene que el último dígito es 0. Además, entre más cerca de 9876543210 se encuentre el número, mejor. Sin embargo, dicho número no es divisible entre 8.
Asumamos que solo dos dígitos cambian de lugar, entonces el número tendría que ser 9876543120. Sin embargo, este número no es divisible entre 11, puesto que $9-8+7-6+5-4+3-1+2-0=7$ que no es divisible entre 11. De ser los últimos tres dígitos los que se cambian, entonces el número tendrá que ser 9876541320 para que sea múltiplo de 8 y el 3 cambie de lugar. Pero nuevamente, $9-8+7-6+5-4+1-3+2-0=3$, que no es divisible entre 11.
Consideremos por lo tanto que el número que estamos buscando es de la forma $98765abcd0$, donde $\{a,b,c,d\}=\{1,2,3,4\}$. Nótese que d es par, por lo que $d=2$ o $d=4$. Si $d=2$, entonces tendríamos que $9-8+7-6+5-a+b-c+2=9+b-(a+c)$ es divisible entre 11. Sin embargo, dado que $\{a,b,c\}=\{1,3,4\}$, entonces $9+b-(a+c)$ tomaría los valores de 9, 7 o 3, ninguno de los cuales es divisible entre 11. Si $d=4$, entonces c es par, y el único par posible es 2, por lo que tenemos el número $98765ab240$, y por lo tanto $9-8+7-6+5-a+b-2+4=9+b-a$. Dado que $\{a,b\}=\{1,3\}$, si $b=3$ y $a=1$ tendríamos que $9+b-a=11$, y por lo tanto, 9876513240 es divisible entre 11. Además, como termina en 240, es divisible entre 8 y, finalmente, como termina en 0 y la suma de sus dígitos es divisible entre 3, entonces también es divisible entre 15.

2.3.7 ↰👁 Sean π_1 y π_2 las dos circunferencias tangentes en C donde O y P son los centros y a y b los radios. Sea D la intersección de la tangente común $\overleftrightarrow{AB}$ con la tangente común por C.



Como $\overline{AO} \parallel \overline{BP}$, se tiene que $m\angle AOC + m\angle CPB = 180°$, luego $\alpha+\beta=90°$ y entonces el $\triangle ABC$ es un triángulo rectángulo con ángulo recto en C, por Teoremas de Pitágoras se obtiene que $AB=10$ y $AD=DC=DB=5$.

Como $\overline{DC} \perp \overline{OP}$, tambien se tiene que $m\angle DAC = m\angle DCA = \beta$ y $m\angle DCB = m\angle DBC = \alpha$, por lo que $\triangle ADC \sim \triangle CPB$ se tiene $\dfrac{b}{6}=\dfrac{5}{8} \Rightarrow b=\dfrac{15}{4}$.

Soluciones del Capítulo 3

3.1.1 ↰👁 En el primer intento de Emma había un color en posición correcta, de los datos del tercer intento se deduce que el rojo no está en la posición 1.

Observando el intento dos, se tiene que:

a) Hay un color colocado en posición correcta.

b) El rojo no está en posición correcta.

c) El café y el verde no son colores correctos.

d) Por lo tanto, el amarillo es el que está en posición correcta (Amarillo va en posición 3)

Con esta nueva conclusión se analiza nuevamente el primer intento. Se tiene que:

a) El rojo está en posición incorrecta.

b) El verde no es color correcto.

c) El amarillo no va en la posición 2 (pues va en posición 3)

d) Hay un color en posición correcta.

Por lo tanto, el azul está en posición correcta. (Azul va en posición 4)
Finalmente, como sabemos que el rojo no va en posición 1, debe ir en posición 2 (ya la posición 3 y 4 están ocupadas) y el morado en posición 1.
Entonces el orden de los colores es Morado, Rojo, Amarillo, Azul.

3.1.2 LLamemos *casilla ganadora* (G) a aquella en la que si un jugador lleva la ficha ahí se asegura ganar la partida y *casilla perdedora* (P) a aquella en la que si un jugador lleva su ficha ahí, con seguridad perderá. Las primeras casillas que podemos clasificar en ganadoras o perdedoras son las siguientes:

			P	G
			P	P

Ahora, una casilla en la que el siguiente jugador **deba** mover su ficha a una casilla perdedora es una casilla ganadora y una en la cual el siguiente jugador **pueda** llegar a una casilla ganadora es perdedora. Se tiene entonces la siguiente clasificación

	P	G	P	G
	P	P	P	P
			P	G
			P	P

Se continúa llenando la cuadrícula, clasificando las casillas con G o P, y se obiene

G	P	G	P	G
P	P	P	P	P
G	P	G	P	G
P	P	P	P	P
G	P	G	P	G

Como inicialmente la ficha ya está colocada en una casilla ganadora, el primer jugador **debe** moverla a una casilla perdedora. A partir de ahí el segundo jugador tiene la estrategia ganadora, moviendo la ficha siempre a una casilla ganadora de las ya señaladas en la cuadrícula anterior. Por lo tanto se concluye que Yuri no tiene razón.
De acuerdo a lo anterior, el primer jugador no tendrá una estrategia ganadora si la casilla inferior izquierda (donde está inicialmente la ficha) es una casilla ganadora; pues este jugador se ve obligado en su primera jugada a moverla a una casilla perdedora, mientras que sí tendrá estrategia ganadora si la ficha se encuentra en unas casilla perdedora.
Se puede observar que la casilla inicial (inferior izquierda) será perdedora si el número de filas de la cuadrícula es par (sin importar el número de columnas) o si el número de filas es impar y el número de columnas es par. Es decir, el primer jugador tendrá una estrategia ganadora para las cuadrículas de tamaño $m \times n$ tales que m sea par (sin importar n), o m sea impar y n sea par.

3.1.3

- Si Federico es el culpable, entonces Federico miente, Leonel dice la verdad, Randall miente, Alexander miente y Erick dice la verdad.
- Si Leonel es el culpable, entonces Federico miente, Leonel miente, Randall dice la verdad, Alexander miente y Erick dice la verdad.
- Si Randall es el culpable, entonces Federico miente, Leonel dice la verdad, Randall dice la verdad, Alexander miente y Erick dice la verdad.
- Si Alexander es el culpable, entonces Federico dice la verdad, Leonel dice la verdad, Randall dice la verdad, Alexander miente y Erick dice la verdad.
- Si Erick es el culpable, entonces Federico miente, Leonel dice la verdad, Randall dice la verdad, Alexander dice la verdad y Erick miente.

Como solo una persona miente, entonces el culpable es Alexander.

3.1.4 No existe estrategia que permita salvar a todos los presos ya que el último de la fila no tiene información sobre su propio sombrero, es decir, no hay manera de garantizar que el último acierte el color de su sombrero.
No obstante, se pueden salvar los otros 2017, acordando previamente una forma de proceder que explicamos a continuación:

Al color negro le asignan el número 1 y al blanco el -1. El último de la fila multiplica todos los signos de que se le asignó a los sombreros que ve por delante de él, indicando el signo resultante, note que si hay cantidad impar de sombreros blancos el signo será negativo, si hay cantidad par de sombreros blancos el resultado será positivo. Ante esto, el último de la fila (empezando por el 2018) dice el color correspondiente a su sombrero (puede acertar si tiene suerte pero no se garantiza que acierte).
Sin embargo el que está delante de él puede darse cuenta si acertó o no, siendo que podría ver los sombreros de los demás delante de él (los 2016 sombreros que puede ver), con lo que sabe el color de su sombrero. Análogamente, los siguientes presos realizan el mismo proceso, con lo que averiguan el suyo propio. De esta forma, se garantiza que todos se salvan todos (salvo posiblemente el último de la fila).
Nota: el mismo razonamiento vale par una fila de N presos y se garantiza que se salvan $N-1$.

3.1.5 Tome en cuenta, que $a = \underbrace{111...111}_{2n \text{ dígitos}}$ es equivalente a $\underbrace{111...1111}_{n \text{ dígitos}}\underbrace{0000...0000}_{n \text{ dígitos}} + \underbrace{111...1111}_{n \text{ dígitos}}$.

Entonces, tendríamos la siguiente equivalencia:

$$\begin{aligned}
a-b &= \underbrace{111...111}_{2n \text{ dígitos}} - \underbrace{222...222}_{n \text{ dígitos}} \\
&= \underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}}\underbrace{0000...0000}_{n \text{ dígitos}} + \underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}} - \underbrace{222...222}_{n \text{ dígitos}} \\
&= \underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}}\underbrace{0000...0000}_{n \text{ dígitos}} + \underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}} - 2(\underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}}) \\
&= \underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}} \cdot 10^n - \underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}} = \underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}}(10^n-1) = \underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}}(\underbrace{999...999}_{n \text{ dígitos}}) \\
&= \underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}} \cdot 9\,(\underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}}) = 9\,(\underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}})^2 = 3^2\,(\underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}})^2 = (3 \cdot \underbrace{111...111}_{n \text{ dígitos}})^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $a-b$ es un cuadrado perfecto.

3.1.6 Supongamos que $n = (abcd)_{10} = a\cdot 10^3 + b\cdot 10^2 + c\cdot 100 + d$.
Como d es impar pero a la vez n debe ser divisible entre 5, se puede concluir que $d=5$. Así que $n = (abc5)_{10}$.
Partimos entonces del hecho de que $a,b,c \in \{1,3,5,7,9\}$
Al "colocar" la división $(abc5)_{10} \div 5$, se tiene lo siguiente:

$$a \quad b \quad c \quad 5 \quad |\underline{\;\;5\;\;\;}$$

Al dividir el dígito a entre 5 en el primer paso de la división, es claro que tiene que $a > 5$, pues en caso contrario el primer dígito del cociente sería cero, y por lo tanto, el cociente ya no tendría cuatro dígitos. Por lo tanto $a \neq 1$ y $a \neq 3$. Entonces forzosamente $a \in \{5,7,9\}$ y el primer dígito del cociente de la división es 1. Supongamos que r_1 es el primer residuo que se obtiene al efectuar $a \div 5$. Una exploración de los tres posibles valores de a, permite deducir que $r_1 \in \{0,2,4\}$. Entonces en ese paso, se "baja" el siguiente dígito (b) y la división se ve así:

$$\begin{array}{llll|l}
a & b & c & 5 & \underline{\;\;5\;\;\;} \\
r_1 & b & & & 1
\end{array}$$

Ahora correspondería dividir el número de dos cifras r_1b entre 5. Al explorar las combinaciones de los posibles valores de r_1 y los posibles valores de b, se descartan las combinaciones $01,03,21,23,41,43$ porque al dividir entre 5 el siguiente dígito del cociente sería par, lo cual contradice el enuciado. Así que se puede concluir que $b \in \{5,7,9\}$.
Supongamos que q es el siguiente dígito impar del cociente que se obtiene al dividir $r_1b \div 5$ y que el residuo, es r_2. Por un razonamiento análogo al del paso anterior, se puede deducir que $q \in \{1,5,9\}$ y que $r_2 \in \{0,2,4\}$. La división en este punto, se vería así:

$$\begin{array}{cccc|l} a & b & c & 5 & \underline{\;5\;\;\;} \\ r_1 & b & & & 1q \\ & r_2 & c & & \end{array}$$

Por el mismo razonamiento del paso anterior, al analizar las combinaciones de los posibles valores de r_2 y los posibles valores de c, se descartan las combinaciones $01,03,21,23,41,43$ porque al dividir entre 5 el siguiente dígito del cociente sería par, lo cual contradice el enuciado. Así que se puede concluir que $c \in \{5,7,9\}$.
Ahora bien, como los números buscados tendrán como última cifra 5, pero sus tres primeras cifras pueden ser 5, 7 o 9, entonces la cantidad de números enteros que cumplen las condiciones solicitadas es de $3^3 = 27$ enteros.

3.1.7 Supongamos que el número buscado es $(abcde)_{10}$. Lo que se busca es determinar el valor de las cifras del número, de forma que: $(abcde)_{10} \cdot (abcde)_{10} = (...abcde)_{10}$
Explorando los posibles valores del dígito e que permitiría que esto suceda, se lleqa a la conclusión de que $e \in \{0,1,5,6\}$, pues para los demás dígitos, no se cumpliría que el último dígito siga siendo el mismo y en la misma posición. Pero si $e = 0$ el número tendría que ser 00000 lo cual no es en realidad un número de cinco cifras. Por otra parte, si $e = 1$ la solución sería 00001 que se descarta de la misma manera que el caso anterior. Por lo tanto, se tiene que $e = 5$ o $e = 6$. Analizamos esos casos por aparte.
Si $e = 5$, al efectuar la operación dígito a dígito, se puede deducir que $d = 2$. Así el número es hasta el momento

$$(abc25)_{10} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + c \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 + 5 = (abc00)_{10} + 25$$

Entonces $((abc25)_{10})^2 = ((abc00)_{10} + 25)^2 = ((abc00)_{10})^2 + 50(abc00)_{10} + 625$. Este último número termina con los dígitos 625, pero como se supone que debe terminar en $c65$, podemos deducir que $c = 6$.
Entonces el número hasta el momento es

$$(ab625)_{10} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 + 5 = (ab000)_{10} + 625$$

Al efectuar $((ab625)_{10})^2 = ((ab000)_{10} + 625)^2 = ((ab000)_{10})^2 + 1250(ab000)_{10} + 390625$. Este último número termina con los dígitos 0625 pero como se supone que debe terminar en $d625$, podemos deducir que $d = 0$.
Entonces el número hasta el momento es

$$(ab625)_{10} = a \cdot 10^5 + b \cdot 10^4 + 6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10 + 5 = (ab000)_{10} + 625$$

Al efectuar $((a0625)_{10})^2 = ((a0000)_{10} + 625)^2 = ((a0000)_{10})^2 + 1250(ab000)_{10} + 390625$. Este último número termina con los dígitos 90625, pero como se supone que debe terminar en $a0625$, podemos deducir que $a = 9$.
Por lo tanto, un número de cinco dígitos que cumple con las condiciones dadas es 90625.
Por un procedimiento análogo, se analiza el caso faltante ($e = 6$). Al finalizar se llega a que el número es 09376, que aunque en efecto cumple que al elevarlo alcuadrado las cinco cifras quedan en la misma posición ($(09376)^2 = 87909376$), en realidad no se considera un número de cinco cifras. Por lo tanto, el número que cumple los requirimientos es 90625.

3.1.8 Vamos a demostrar que la mayor suma de dígitos es 40 y ocurre para $313^2 = 97\,969$.
Se puede observar que la suma de dígitos de un número de cinco cifras es un valor que puede variar entre 1 y 45.
Todo número tiene una de las siguientes formas: $3k, 3k+1, 3k+2$. Cuando los elevamos al cuadrado se obtienen:
$(3k)^2 = 9k^2$
$(3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$
$(3k+2)^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$
Es decir, los cuadrados perfectos son múltiplos de 9 o son múltiplos de 3 más 1. Pero los números que son múltiplos de 9 tienen como suma de cifras un valor que es múltiplo de 9 y los números que son múltiplos de 3 más 1 tiene como suma de cifras un valor que es múltiplo de 3 más 1.
En consecuencia, los únicos valores mayores que 40 que se podrían obtener al sumar los dígitos de un cuadrado perfecto son 43 y 45.
Es claro que el único número con suma de dígitos 45 es 99 999, que no es un cuadrado perfecto.
Si la suma de las cifras de un número de cinco cifras fuera 43, sus dígitos serían cuatro nueves y un siete, o en todo caso, dos ochos y tres nueve; los únicos números que cumplen la condición son:
79 999, 97 999, 99 799, 99 979, 99 997; 88 999, 89 899, 89 989, 89 998, 98 899, 98 989, 98 998, 99 889,
99 898, y 988.
Pero un número ubicado entre dos cuadrados perfectos consecutivos no es cuadrado perfecto.
Luego:

$$282^2 = 79524 < 79999 < 80089 = 283^2$$

$$298^2 = 88804 < 88999 < 89401 = 299^2$$

$$299^2 = 89401 < 89899, 89989, 89998 < 90000 = 300^2$$

$$313^2 = 97969 < 97999 < 98596 = 314^2$$

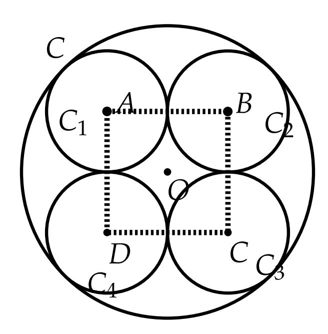
$$314^2 = 98596 < 98899, 98989, 98998 < 99225 = 315^2$$

$$315^2 = 99225 < 99799 < 99856 = 316^2$$

$$316^2 = 99856 < 99889, 99898, 99988, 99979, 99997 < 100489 = 317^2$$

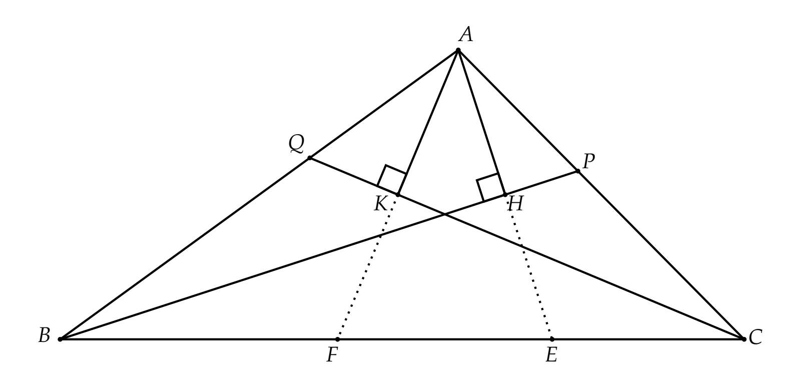
Ninguno de estos quince números es cuadrado perfecto.
Queda demostrado que el mayor valor que puede obtener Carlos al sumar los dígitos de cuadrado perfecto es 40.

3.1.9 El radio de cada círculo pequeño mide 2 cm. Denote el círculo grande con C y centro en O, a los círculos pequeños como C_1, C_2, C_3 y C_4 con sus respectivos centros A, B, C y D.
Como el radio de cada círculo pequeño mide 2 cm, entonces $AB = BC = CD = AD = 4$ cm. Por lo anterior, el $\square ABCD$ es un cuadrado. El área del cuadrado es $(ABCD) = 4^2 = 16$ cm^2.
Por otro lado, el área de cada círculo pequeño es $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$ cm^2.



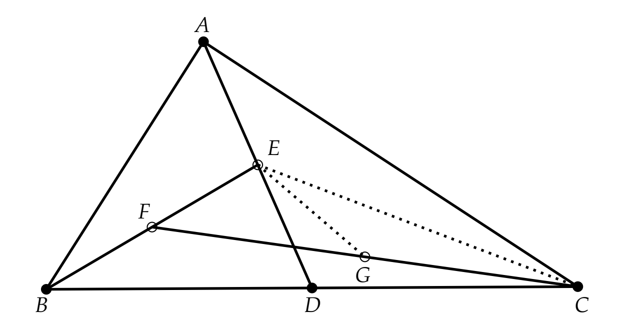
El área del cuadrado tiene una cuarta parte de cada uno de los círculos pequeños, al sumar dichas áreas se obtiene 4π cm^2.
El área de la región acotada por los cuatro círculos pequeños, es el área del cuadrado menos el área de la cuarta parte de cada uno de los círculos pequeños que están en el cuadrado; es decir; $16 - 4\pi$ cm^2.

3.1.10 Sea F el punto de intersección de la recta $\overleftrightarrow{AK}$ con $\overline{BC}$ y E el punto de intersección de la recta $\overleftrightarrow{AH}$ con $\overline{BC}$ como se muestra en la figura.



Note que los triángulos $\triangle AHB$ y $\triangle EHB$ son congruentes ya que $\overline{BP}$ biseca al ángulo B y los ángulos $\angle AHB$ y $\angle EHB$ son rectos, por tanto $AH = HE$.
En forma similar, $AK = KF$ y aplicando el teorema de la paralela media sobre el $\triangle AFE$ se comcluye que las rectas $\overleftrightarrow{EF}$ y $\overleftrightarrow{KH}$ son paralelas.

3.1.11 Considere la siguiente figura:



En cada caso, cada pareja de triángulos tienen la misma altura, así:

$(EFG) = \frac{1}{2}(EFC)$ (FG es un medio de FC)

$(EFC) = \frac{1}{2}(BEC)$ (EF es un medio de EB)

$(BED) = \frac{1}{2}(BEC)$ (BD es un medio de BC)

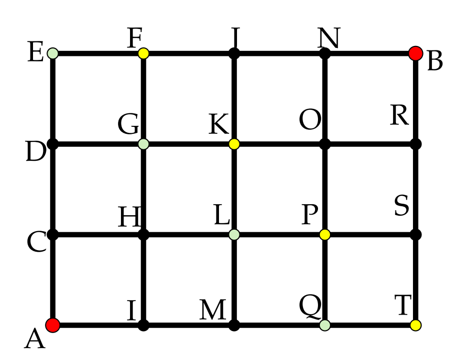
Así $(EFC) = (BED)$.

$(BED) = \frac{1}{2}(ABD)$ (ED es un medio de AD)

$(ABD) = \frac{1}{2}(ABC)$ (BD es un medio de BC)

Así, se tiene: $(\triangle ABD) = 8$, $(EFC) = 4$ y $(EFG) = 2$ m^2

3.2.1 Considere las esquinas de las cuadras (intersecciones de las calles) y nombrémoslas así:



Tanto Jennifer como Steven planean utilizar el recorrido mínimo para llegar a su destino. En ambos casos para eso deberán recorrer siete cuadras. Para eso Jennifer solo pude recorrer las calles caminando hacia el Norte y al Este, mientras que Steven deberá recorrerlas caminando hacia el Sur y al Oeste. En las tres primeras cuadras no hay posibilidad de que se crucen. Después de la tercer cuadra Jennifer se encontrará en alguno de los puntos E, G, L o Q, mientras que en ese momento Steven se encontrará en alguno de los puntos F, K, P o T. Analicemos las probabilidades a partir de los puntos después de los cuales se podrían cruzar Jennifer y Steven en su camino.

Caso 1: Jennifer llega al punto E. Como en cada esquina Jennifer tiene dos opciones de donde escoger para llegar al punto E, la probabilidad es $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Ahora para que se cruce con Steven, este deberá encontrarse en el punto F, y la probabilidad de llegar ahí también es $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Una vez que llega al punto E, a Jennifer no le queda otra alternativa que dirigirse al punto F, pero Steven podría moverse hacia el punto E o hacia el punto G, por lo que la probabilidad de que Steven y Jennifer se encuentren en el segmento de la calle que une E y F es entonces: $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^7}$.
Caso 2: El caso en el que Jennifer llega al punto Q y Steven al punto T es análogo al anterior, y por lo tanto, la probabilidad de que Steven y Jennifer se encuentren en el segmento de la calle que une T con Q es también: $\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^7}$.
Caso 3: El caso en el que Jennifer llega al punto Q y Steven al punto P. La probabilidad de que Jennifer llegue a Q es de $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. La probabilidad de que Steven llegue a P es de $\frac{3}{8}$, porque hay tres maneras de llegar hasta ahí. Así que la pribabilidad de que se encuentren en el segmento de la calle que une Q con P es de $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2^8}$.
Caso 4: Jennifer llega al punto G. La probabilidad de que esto suceda es $3 \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{3}{8}$ porque hay tres maneras de llegar hasta ahí, teniendo dos opciones para doblar en cada esquina. En este caso, para que Jennifer se cruce con Steven, este último deberá haber llegado a los puntos F o K. Analicemos ambas situaciones:

a. *Steven está en el punto F*: Steven llega al punto F con una probabilidad de $\frac{1}{8}$. En ese caso se cruzarían en el segmento de la calle que une F con G. Steven en ese caso tendría que escoger una de dos opciones y de igual manera Jennifer. Así que la probabilidad de que se crucen es $\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2^8}$.

b. *Steven está en el punto K*: Steven llega al punto K con una probabilidad de $\frac{3}{8}$ porque hay tres maneras de llegar hasta ahí, teniendo dos opciones para doblar en cada esquina. Entonces se cruzarían en el segmento de la calle que une G con K, pero solo si Jennifer y Steven escogen una de las dos posibilidades de movimiento que tienen. Así la probabilidad de que se crucen en esa calle es $\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2^8}$.

Caso 5: Jennifer llega al punto L. La probabilidad de que esto suceda es $3 \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{3}{8}$ porque hay tres maneras de llegar hasta ahí, teniendo dos opciones para doblar en cada esquina. En este caso, para que Jennifer se cruce con Steven, este último deberá haber llegado a los puntos P o K. Analicemos ambas situaciones:

a. *Steven está en el punto P*: Steven llega al punto P con una probabilidad de $\frac{3}{8}$ porque hay tres maneras de llegar hasta ahí, teniendo dos opciones para doblar en cada esquina. En ese caso se cruzarían en el segmento de la calle que une L con P. Steven tendría que escoger una de dos opciones y de igual manera Jennifer. Así que la probabilidad de que se crucen es $\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2^8}$.

b. *Steven está en el punto K*: Steven llega al punto K con una probabilidad de $\frac{3}{8}$ porque hay tres maneras de llegar hasta ahí, teniendo dos opciones para doblar en cada esquina. Entonces se cruzarían en el segmento de la calle que une L con K, pero solo si Jennifer y Steven escogen una de las dos posibilidades de movimiento que tienen. Así la probabilidad de que se crucen en esa calle es $\frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{2^8}$.

De esta manera la probabilidad de que Jennifer y Steven se crucen en su camino es

$$\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^7}+\frac{3}{2^8}+\frac{3}{2^8}+\frac{9}{2^8}+\frac{9}{2^8}+\frac{9}{2^8}=\frac{37}{256}$$

3.2.2 Si se colocan los números en un arreglo triangular, colocando en filas diferentes pares e impares, según la regla que define la sucesión, se obtiene:

1

2 $\quad 4=2^2$

5 $\quad$ 7 $\quad 9=3^2$

10 $\quad$ 12 $\quad$ 14 $\quad 16=4^2$

17 $\quad$ 19 $\quad$ 21 $\quad$ 23 $\quad 25=5^2$

Dado el patrón que se observa, conviene identificar cuál es el cuadrado perfecto más cercano a 1998 sin sobrepasarlo. Se observa que, $43^2=1849$, $44^2=1936$ mientras que $45^2=2025$. Por lo tanto, hay que inferir cómo serán las filas correspondientes en la sucesión.
La prolongación del acomodo triangular de los valores de la sucesión (con la indicación del número de cada fila) se vería así:

Fila # 1: 1

Fila # 2: 2 $\quad 4=2^2$

Fila # 3: 5 $\quad$ 7 $\quad 9=3^2$

Fila # 4: 10 $\quad$ 12 $\quad$ 14 $\quad 16=4^2$

Fila # 5: 17 $\quad$ 19 $\quad$ 21 $\quad$ 23 $\quad 25=5^2$

...

Fila # 44: 1850 ... $1896=44^2$

Fila # 45: 1937 ... $2025=45^2$

Fila # 46: 2026 ... $2116=46^2$

Note que en la sucesión, el último número par mayor que 1998 es 1896 (entre ellos hay una diferencia de 102 unidades) y el siguiente número par que aparece en la sucesión que es mayor que 1998 es 2026 (entre ellos hay una diferencia de 28 unidades). Por lo tanto, el número par en la sucesión que se encuentra más cercano a 1998 es 2026.
Para determinar la posición que ocupa el número 2026 en la sucesión, se debe tomar en cuenta que en cada fila se va incrementando la cantidad de elementos en una unidad. Por lo tanto, la cantidad total de términos de la sucesión hasta la fila n está dada por la expresión $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Al ser 2026 el primer elemento de la fila # 46, podemos calcular su posición a partir del total de términos hasta la fila # 45 más una unidad. Así, la posición del número 2026 en la sucesión corresponde a $\dfrac{45(45+1)}{2}\ +\ 1\ =\ \dfrac{45\cdot 46}{2}\ +\ 1\ =\ 45\cdot 23\ +1\ =1035+1\ =\ 1036$

3.2.3 Se dice que un conjunto de ciudades está **conectado** si se puede ir entre cualesquiera dos de ellas, usando las autopistas construidas. Observe que si se tiene dos conjuntos distintos de ciudades conectadas, entonces no es posible viajar de una ciudad de un conjunto a una ciudad del otro. Por otro lado, observe que si el gobierno construye todas las autopistas en un conjunto de 16 ciudades, y deja una aislada, entonces no se va a cumplir la propiedad de que todas las ciudades pertenezcan a un conjunto conectado.
Por lo tanto, la cantidad de autopistas n debe cumplir que

$$n > \binom{16}{2} = \frac{16\cdot 15}{2} = 120.$$

Ahora, se comprueba que con 121 caminos se obtiene la propiedad deseada. Suponga que se tiene dos conjuntos de ciudades conectados, pero de modo que no están conectados entre ellos, es decir, no hay carreteras entre ninguna ciudad del primer conjunto con el segundo. En el mejor caso posible, entonces existe una carretera entre cualesquiera dos ciudades del primer conjunto, y entre cualesquiera dos ciudades del segundo conjunto. Si el primer conjunto tiene k ciudades entonces el segundo tendrá $17-k$ ciudades.
En este caso, la cantidad de carreteras en el primer conjunto es $\dbinom{k}{2} = \dfrac{k\cdot(k-1)}{2}$, y la cantidad de carreteras en el segundo conjunto es $\dbinom{17-k}{2} = \dfrac{(17-k)\cdot(16-k)}{2}$.
Luego, el total de caminos es

$$\begin{aligned}
\frac{k\cdot(k-1)}{2} + \frac{(17-k)\cdot(16-k)}{2} &= \frac{1}{2}\left(k^2-k+272-33k+k^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(2k^2-34k+272\right) = k^2-17k+136\\
&= (k-17/2)^2+255/4\\
&\leq (15/2)^2+399/4\\
&= 120
\end{aligned}$$

Sin embargo, se supone que hay al menos 121 caminos.

3.2.4 Los dos amigos tiene razón, como se demuestra a continuación.

- Vamos a ver que Carlos a lo sumo se comunica con 2 mujeres por FAC. Si Carlos se comunica por FAC con 3 mujeres, no importa como las escoja siempre dos de ellas serán vecinas. Suponga sin pérdida de generalidad que las vecinas son Ana y Berta.

  Carlos se comunica por FAC con Juan, Ana y Berta por lo tanto Ana se comunica por INS con Berta.

Ahora, si Juan se comunica por FAC con Berta entonces Carlos, Juan y Berta usan la misma red social, lo cual contradice el enunciado.

Si Juan se comunica por INS con Berta entonces Juan se comunica por FAC con Ana (ya que Ana se comunica por INS con Berta).

Pero eso significa que Carlos, Juan y Ana usan la misma red social, contradicción.

- Vamos a ver que Carlos se comunica con el otro vecino por FAC

  Si Carlos se comunica por INS con el otro vecino, por lo anterior Carlos se comunicaría por INS a lo sumo con dos mujeres, eso significa que Carlos no se comunica con la quinta mujer, contradición.

  Por lo tanto Carlos se comunica por FAC con el otro vecino. Así todos los hombres se comunican con sus vecinos por FAC y por tanto con los amigos del frente por INS.

  De mismo modo todas las mujeres se comunican con sus vecinas por una red social y con las amigas del frente por otra.

- Vamos a ver que las mujeres se comunican con sus vecinas por FAC.

  Suponga lo contrario, entonces Ana se comunica por INS con Berta, y Carlos se comunica por FAC con Ana, Berta y Juan.

  Por tanto Juan se comunica por INS con Ana, pues de lo contrario Carlos, Juan y Ana usan la misma red.

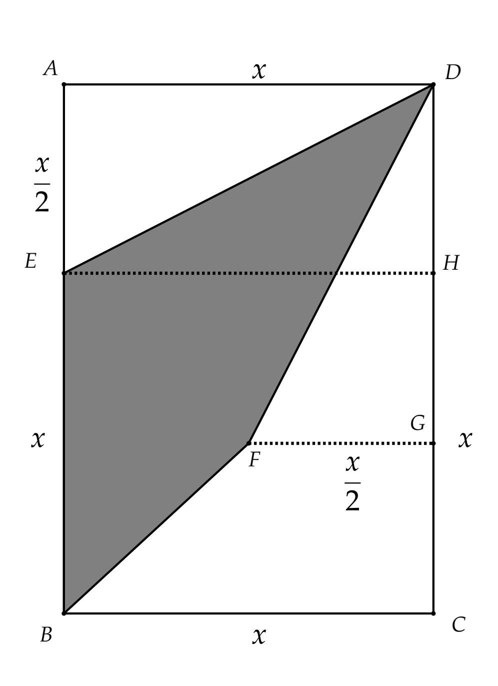
  Del mismo modo Juan se comunica por INS con Berta, pero esto implica que Juan, Ana y Berta se comunican por INS, contradicción.

3.2.5 Sea p un número primo.
Nótese que $u_{p-1} < u_p$. u_{p-1} claramente no es divisible entre p (y $(p-1)!$ tampoco), y en $p!$ solo se agrega el número p, por primera vez, lo que no completa ningún cuadrado nuevo, y por ende, $u_p = p\,u_{p-1} > u_{p-1}$.
Por otro lado, nótese que $(2p-1)!$ es divisible por p, pero no por p^2, y por lo tanto u_{2p-1} es divisible por p.
Por otro lado, $(2p)!$ es divisible por p^2 pero no por p^3. Además, el único factor nuevo es $2p$.
Por lo tanto $u_{2p} = \dfrac{u_{2p-1}}{p}$ si $(2p-1)!$ contiene un número par de factores 2 en su factorización, y $u_{2p} = \dfrac{u_{2p-1}}{2p}$ si no. En ambos casos, $u_{2p} < u_{2p-1}$.

3.2.6 Sean $y = 2n+1 = a^2$, $z = 3n+1 = b^2$ para algún a y b enteros.
Como y es impar entonces a tiene que ser impar; es decir, es de la forma $a = 2u+1$, con $u \in \mathbb{Z}$, entonces $x = n+1 = \dfrac{a^2-1}{2} + 1 = \dfrac{(2u+1)^2+1}{2} = 2u^2+2u+1 = u^2+u^2+2u+1 = u^2+(u+1)^2$.
Como b^2 no es múltiplo de 3 entonces b no es multiplo de 3.
Por consiguiente tenemos dos casos:

- $b = 3v + 1$ entonces $x = n + 1 = \dfrac{b^2 - 1}{3} + 1 = \dfrac{b^2 + 2}{3}$
  $x = \dfrac{(3v+1)^2 + 2}{3} = 3v^2 + 2v + 1 = 2v^2 + v^2 + 2v + 1 = 2v^2 + (v+1)^2 = (-v-1)^2 + 2(-v)^2$ donde $t = -v - 1$.
- $b = 3v + 2$ entonces $x = \dfrac{(3v+2)^2 + 2}{3} = 3v^2 + 2v + 2 = v^2 + 2(v^2 + 2v + 1) = v^2 + 2(v+1)^2$

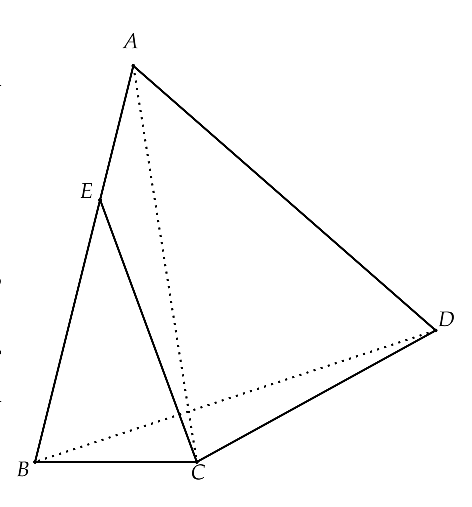
3.2.7 Sea $AD = x$ entonces $CD = \dfrac{3x}{2}$, luego $(ABCD) = \dfrac{3x^2}{2}$. Ahora determinemos el área sombreada. Consideremos la figura adjunta.
Como F es el punto medio de $\overline{EC}$ entonces F es el centro del cuadrado $EBCH$, por lo tanto $FG = \dfrac{x}{2}$. Así,
$(ADE) = (FGD) = \dfrac{x \cdot \frac{x}{2}}{2} = \dfrac{x^2}{4}$.



Por otra parte, $(BCGF) = \dfrac{(x + \frac{x}{2}) \cdot \frac{x}{2}}{2} = \dfrac{\frac{3x}{2} \cdot \frac{x}{2}}{2} = \dfrac{3x^2}{8}$.
Luego, el área sombreada corresponde a: $A_s = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{3x^2}{8} = \dfrac{5x^2}{8}$.

Finalmente, la razón r de las áreas está dado por:
$r = \dfrac{\frac{5x^2}{8}}{\frac{3x^2}{2}} = \dfrac{10}{24} = \dfrac{5}{12}$.

3.2.8 Se probará que $\triangle AEC \cong \triangle BCD$

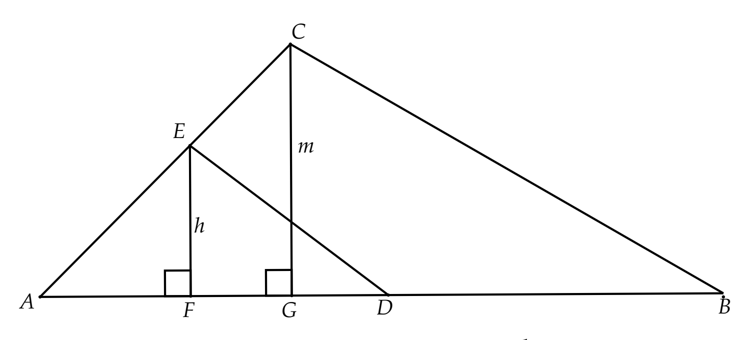


Como $\overline{AB} \cong \overline{BD} \cong \overline{AD}$ entonces el $\triangle ABD$ es equilátero y $m\angle ABC = m\angle BDA = M\angle DAB = 60°$.
Dado que $m\angle ABC = m\angle ACB = 80°$ entonces $m\angle BAC = 20°$.
Si $m\angle BEC = 30°$ entonces $m\angle AEC = 150°$ y $m\angle ECA = 10°$.
Si $m\angle BAC = 20°$ y $m\angle BDA = 60°$ entonces $m\angle CAD = 40°$.
En el $\triangle ABC$ se tiene que $m\angle ABC = m\angle ACB = 80°$, por lo tanto $\triangle ABC$ es isósceles. Así, $\overline{AB} \cong \overline{AC}$.
Del eneunciado se tiene que $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ y del paso anterior $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, entonces $\overline{AC} \cong \overline{AD}$. Por lo tanto $\triangle ACD$ también es isósceles.

Como $\triangle ACD$ es isósceles y $m\angle CAD = 40°$ entonces $m\angle ACD = m\angle CDA = 70°$.
Luego $m\angle BDC = 10°$, $m\angle DBC = 20°$ y $m\angle BCD = 150°$.
Finalmente, como $\overline{AC} \cong \overline{BD}$, por criterio de congruencia $a.l.a$ se tiene que $\triangle AEC \cong \triangle BCD$, del cual se deduce que $\overline{EC} \cong \overline{CD}$.

3.2.9 Considere la figura en la que están las alturas h del $\triangle AED$ y m del $\triangle ACB$, trazadas desde E y C, respectivamente.

Dado que $m\angle CAG = 45°$ y $\triangle ACG$ es rectángulo, entonces $m\angle ACG = 45°$ y $AG = m$. Para el $\triangle AEF$ (que es también triángulo rectángulo isósceles) con argumentos similares se llega a que $AF = h$.
En el $\triangle CGB$, dado que $m\angle CBG = 30°$ y este triángulo es rectángulo, se concluye que $m\angle GCB = 60°$; para este triángulo especial $30° - 60° - 90°$ se concluye que $GB = m\sqrt{3}$.



En el $\triangle EFD$ (que también es un triángulo especial $30° - 60° - 90°$), se tiene que $FD = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$.

Así, el valor numérico de $$\frac{AB}{AD} = \frac{AG + GB}{AF + FD} = \frac{m + m\sqrt{3}}{h + \dfrac{h}{\sqrt{3}}} = \frac{m\left(1+\sqrt{3}\right)}{h\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{m}{h}\sqrt{3} \qquad (*)$$

Las áreas de los triángulos $\triangle AED$ y $\triangle ACB$ están dadas por:

$$(AED) = \frac{AD \cdot h}{2} = \frac{h\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) \cdot h}{2} = h^2 \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

$$(ACB) = \frac{AB \cdot m}{2} = \frac{m\left(1+\sqrt{3}\right) \cdot m}{2} = m^2 \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

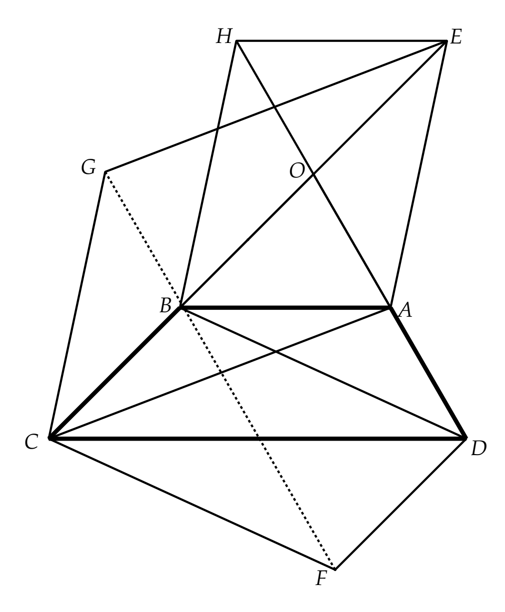
Como $\overline{DE}$ divide al $\triangle ACB$ es dos regiones de igual área, se tiene que:

$$\begin{aligned}
&(ACB) = 2\,(AED)\\
&m^2\frac{1+\sqrt{3}}{2} = 2h^2\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\\
&m^2 = 2h^2\frac{1}{\sqrt{3}}\\
&\frac{m^2}{h^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\\
&\frac{m}{h} = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Sustituyendo este último resultado en $(*)$, se tiene: $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{m}{h}\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt{3}}\sqrt{3} = \sqrt[4]{12}$.

Por lo tanto, $\left(\dfrac{AB}{AD}\right)^4 = 12$.

3.2.10 Considere la siguiente figura:



Como $\overline{AH}$ y $\overline{BE}$ se intersecan en su punto medio y corresponden a las diagonales de $\square ABHE$, entonces dicho cuadrilátero es un paralelogramo. Igualmente ocurre con $\square ACGE$ y $\square BCFD$.
Se tiene entonces que los segmentos $\overline{CG}$, $\overline{AE}$ y $\overline{BH}$ son paralelos y congruentes, lo mismo que $\overline{CF}$ y $\overline{BD}$, entonces $\angle GCF \cong \angle HBD$ y $\triangle GCF \cong \triangle HBD$.
De esto se tiene que $\angle CGF \cong \angle BHA$, pero también $\angle BHA \cong \angle HAE$ (alternos internos entre paralelas).
Entonces $m\angle CGF + m\angle CEA = m\angle HAE + m\angle CEA$.
Como $m\angle ADC = 60°$ y $m\angle BCD = 45°$, entonces $m\angle COD = 75°$ y $m\angle HAE + m\angle CEA = 75°$ (por teorema del ángulo externo en $\triangle AOE$).

3.2.11 De la primera ecuación se obtiene que $x + y = 6 - z$, por tanto $(x+y)^2 = (6-z)^2$, mientras que de la segunda ecuación se obtiene que $xy = 5 - z(x+y) = 5 - z(6-z) = 5 - 6z + z^2$.
Por otra parte, note que $S = (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - 4xy = (x+y)^2 - 4xy$.
así, $S = (x+y)^2 - 4xy = (6-z)^2 - 4(5 - 6z + z^2) = -3z^2 + 12z + 16$.
Con lo anterior, S es una función cuadrática convexa, cuyo vértice corresponde a $(2, 28)$. Por lo tanto, su máximo valor es 28.

3.3.1 Se observa que si un jugador llega al número 1987, el jugador siguiente perderá, porque de los números del 1 al 30 aun no puede llegar a 2018 pero lo menos que puede sumarle es 1, con lo que el otro jugador ganará. Más concretamente, si uno suma k el otro debe sumar $31 - k$ para llegar a 2018 pues $1987 + k + 31 - k = 1987 + 31 = 2018$. Podemos decir entonces que 1987 es una posición ganadora.
A partir de esto se observa que todos los números de la forma $2018 - 31n$ serán posiciones ganadoras y la estrategia consiste en sumar, en cada jugada, el complemento a 31 de lo que sume el otro jugador para mantenerse en dichas posiciones ganadoras.
Además, como $2018 = 31 \cdot 65 + 3$, vemos que $3 = 2018 - 31 \cdot 65$ es la primera posición ganadora. Es decir, la estrategia ganadora la tiene el primer jugador escogiendo inicialmente el número 3 y a partir de ahí sumar el complemento a 31 de lo que sume el segundo jugador.

Observamos que si 2018 fuese múltiplo de 31 entonces el primer jugador no tendría estrategia ganadora, pues en su primera jugada debe escoger un número que no está en posición ganadora.
En general, para que el primer jugador no tenga estrategia ganadora, b debe ser múltiplo de $a+1$.

3.3.2 ↩👁 Para poder salir del círculo Jordan debe seguir el siguente proceso.
En el primer paso es indiferente la dirección que Jordan escoja, siempre estará a 1 metro del centro del círculo.
Sea O el centro del círculo y P la posición actual de Jordan, para que el cambio de dirección a la que le puede obligar el gigante no retrace el avance de Jordan, este debe tomar la direccíon de la perpendicular a $\overline{OP}$; así, por el teorema de Pitágoras siempre estará más lejos del centro en la nueva posición que en la posición anterior (P).
Aplicando este procedimiento tenemos que Jordan después de su segundo movimiento se encuentra a una distancia $\sqrt{2}$ del centro O, después del tercer movimiento se encuestra a $\sqrt{3}$ del centro O, y en general después de n movimientos se encontrará a una distancia $\sqrt{n}$ del centro O.
Para que Jordan llegue al borde del círculo debe recorrer 100 metros es decir

$$\sqrt{n} = 100 \Rightarrow n = 100^2 \Rightarrow n = 10\,000$$

Por lo que Jordan debe dar al menos 10 001 pasos para salir del círculo.

3.3.3 ↩👁 La pregunta es equivalente a averiguar el número mínimo de sobres para que haya probabilidad menor a 50 % de que todas las banderas sean distintas.
Entonces, si p_k es la probabilidad de que abriendo k sobres todas las banderas son distintas, entonces:

$$p_1 = \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} = \frac{11}{12} \approx 92\,\%$$
$$p_2 = \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} = \frac{55}{72} \approx 76\,\%$$
$$p_3 = \frac{12}{12} \times \frac{11}{12} \times \frac{10}{12} \times \frac{9}{12} \times \frac{8}{12} \times \frac{7}{12} = \frac{385}{1296} \approx 30\,\%$$

Por lo tanto, el número buscado es tres sobres.

3.3.4 ↩👁 $(c-1)(ab-b-a) = a+b-2$
Sumado $(c-1)$ a ambos lados de la expresión

$$(c-1)(ab-b-a) + (c-1) = a+b+c-3$$

$$(c-1)(ab-b-a+1) = a+b+c-3$$

$$(c-1)(b-1)(a-1) = a-1+b-1+c-1$$

Haciendo la sustitución $x = a-1$, $y = b-1$, $z = c-1$

$$xyz = x+y+z$$

Suponga que $x \geq y \geq z \geq -1$ (ya que $c = z+1 \geq 0$)

- Si $z=-1$ entonces $-xy=x+y-1$

$$0=xy+x+y+1-2$$

$$(x+1)(y+1)=2$$

  Por tanto $x=1$ y $y=0$ y se obtiene la solución $(a,b,c)=(2,1,0)$

- Si $z=0$ entonces $0=x+y$ entonces $x=-y=0$ y se obtiene la solución $(a,b,c)=(1,1,1)$

- Si $z=1$ entonces $xy=x+y+1$ y de igual manera

$$(x-1)(y-1)=2$$

  Por tanto $x=3$ y $y=2$ y se obtiene la solución $(a,b,c)=(4,3,2)$

  Entonces sus soluciones son $(2,1,0)$, $(1,1,1)$ y $(4,3,2)$ y sus permutaciones.

3.3.5 Observe que $a^2+2a^2+a=a^2+3b^2+b \Rightarrow 3a^2+a-3b^2-b=a^2$
$a^2=3(a^2-b^2)+a-b \Rightarrow a^2=3(a+b)(a-b)+(a-b) \Rightarrow a^2=(a-b)(3a+3b+1)$.
Así, basta con demostrar que $a-b$ y $3a+3b+1$ son coprimos, pues como su producto es un cuadrado, necesariamente cada uno de ellos debe de ser un cuadrado.
Supongamos que p es un divisor de $a-b$.
Entonces $p|(a-b) \Rightarrow p|(a-b)(a+b)=(a^2-b^2)$
$\Rightarrow p|(a-b)+3(a^2-b^2)=a^2 \Rightarrow p|a^2 \Rightarrow p|a^2-(a^2-b^2)$.
$\Rightarrow p|b^2$
Luego, $p|b$, pues si $p \not| b \Rightarrow p \not| b^2$ lo cual no es posible y así:
$p|b+(a-b) \Rightarrow p|a$.
Si $p|(3a+3b+1) \Rightarrow p|(3a+3b+1)-3a-3b$ pues $p|a$ y $p|b \Rightarrow p|1 \Rightarrow p=1$, lo cual contradice que es primo y por lo tanto p no divide a $3a+3b+1$.
Por lo tanto, $a-b$ y $3a+3b+1$ son coprimos.

3.3.6 Note que $p=\underbrace{111111\ldots1}_{\text{d dígitos}}$ y si d es compuesto es de la forma $d=qk$ con q,k enteros positivos.

Entonces

$$p=\underbrace{111111\ldots1}_{\text{d dígitos}}=\underbrace{11\ldots1}_{\text{q}}\underbrace{11\ldots1}_{\text{q}}\cdots\underbrace{11\ldots1}_{\text{q}}$$

Por otra parte note que

$$\underbrace{11\ldots1}_{\text{q}}\times1=\underbrace{11\ldots1}_{\text{q}}$$

$$\underbrace{11\ldots1}_{\text{q}}\times\underbrace{10\ldots0}_{\text{q}}=\underbrace{11\ldots1}_{\text{q}}\underbrace{00\ldots0}_{\text{q}}$$

Por tanto

$$\underbrace{11\ldots1}_{q}\times\underbrace{10\ldots0}_{q}1=\underbrace{11\ldots1}_{q}\underbrace{11\ldots1}_{q}$$

Finalmente

$$\underbrace{11\ldots1}_{q}\times\underbrace{10\ldots0}_{q}\cdots\underbrace{10\ldots0}_{q}1=\underbrace{11\ldots1}_{q}\underbrace{11\ldots1}_{q}\cdots\underbrace{11\ldots1}_{q}=p$$

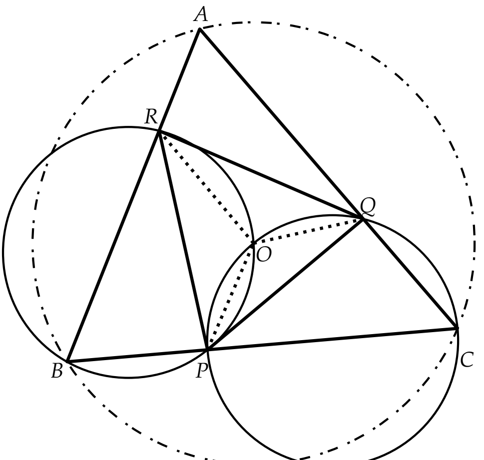
Lo cual contradice el hecho de que p es primo. Por tanto d es primo.

3.3.7 Como a y b son pares entonces $M=(a+b)^2-ab=a^2+ab+b^2$ es par y por tanto divisible por 10.
Como $10 \mid (a^2+ab+b^2)$ entonces $10 \mid (a^3-b^3)$, lo que significa que la resta (a^3-b^3) termina en 10, entonces a^3 y b^3 terminan en el mismo dígito. Así, la afirmación I es falsa.
Como se aprecia en la siguiente tabla que contiene las unidades de n y n^3.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9

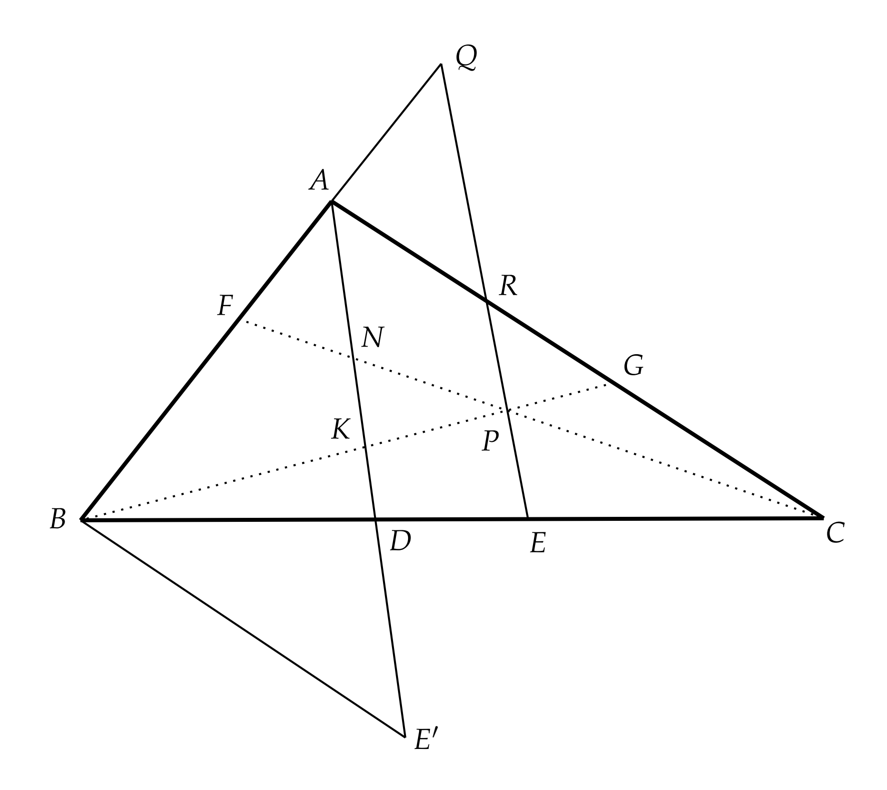
Si a^3 y b^3 terminan en el mismo dígito entonces a y b terminan en el mismo dígito.
Por tanto a^2, ab y b^2 tienen el mismo dígito en las unidades, entonces $M=a^2+ab+b^2$ (que termina en 0) tiene el mismo dígito en las unidades que el número $3a^2$.
Por lo anterior, $10 \mid 3a^2$, $10 \mid a^2$, $10 \mid a$ y, por lo tanto, $10 \mid b$.
Finalmente esto significa que $100 \mid a^2$, $100 \mid ab$ y $100 \mid b^2$, con lo cual $100 \mid M$. Así, la afirmación II es verdadera.

3.3.8 Primero veamos que $\square OQAR$ es un cuadrilátero cíclico. Como $\square ORBP$ y $\square OPCQ$ son cíclicos, se tiene que $m\angle ROP=180°-m\angle B$, $m\angle QOP=180°-m\angle C$.
Luego, $m\angle ROQ=360°-m\angle ROP-m\angle QOP=m\angle B+m\angle C=180°-m\angle A$, y por lo tanto $\square OQAR$ es cíclico.
Veamos ahora que $m\angle P=m\angle A$. Como $\square ORBP$ es cíclico, $m\angle OPR=m\angle OBR=m\angle OAB$, y como $\square OPCQ$ es cíclico, $m\angle OPQ=m\angle OCQ=m\angle OAQ$. Luego, $m\angle P=m\angle OPR+m\angle OPQ=m\angle OAB+m\angle OAQ=m\angle A$.
Análogamente, $m\angle Q=m\angle B$ y $m\angle R=m\angle C$. Por lo que los triángulos $\triangle PQR$ y $\triangle ABC$ son semejantes. Como $\square OQAR$ es cíclico se tiene que $m\angle OQR=m\angle OAR=90°-m\angle C$, y como $m\angle PRQ=m\angle C$, $\overline{QO}$ es perpendicular a $\overline{RP}$.
En forma similar, $\overline{RO}$ es perpendicular a $\overline{PQ}$, por lo que O es el ortocentro del $\triangle PQR$.



Note que los radios de las circunferencias circunscritas a los triángulos $\triangle BPO$ y $\triangle COP$ son iguales, ya que dichas circunferencias tienen como cuerda común a $\overline{PO}$ y se tiene que $m\angle OBP=m\angle OCP$. De igual manera, las circunferencias circunscritas a los triángulos $\triangle BPO$ y $\triangle PQR$ tienen el mismo radio, ya que estas últimas tienen la cuerda $\overline{PR}$ en común y los ángulos $\angle RBP$ y $\angle PQR$ son congruentes.

3.3.9 Sean Q y R las intersecciones de l con $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$ respectivamente.
Sean K y N los puntos donde $\overline{BG}$ y $\overline{CF}$ cortan a $\overline{AD}$, respectivamente.
Sea $a = m\angle BAD = m\angle DAC$. Como l y $\overline{AD}$ son paralelas, se tiene que $m\angle ARQ = m\angle DAC = a$, y entonces el $\triangle AQR$ es isósceles con $AQ = AR$.
También, por ser l y $\overline{AD}$ paralelas, se tiene que $m\angle ADB + m\angle REC = 180°$, $m\angle ADB = m\angle QEB$ y $m\angle ERC = m\angle BAD = m\angle BQE = a$.
Por otro lado, como $BD = EC$, se tiene que $BE = CD$. Sea E' sobre la prolongación de $\overline{AD}$ (con D entre A y E') y tal que $DE' = ER$. Por el criterio LAL, los triángulos $\triangle BDE'$ y $\triangle CER$ son congruentes, lo que implica que $m\angle BE'D = m\angle CRE = a$, y entonces el $\triangle ABE'$ es isósceles, con $BE' = AB$, pero $BE' = CR$ (por la congruencia) y entonces $AB = CR$.



Tenemos también que, $BQ = BA + AQ = RC + AR = AC$. Ahora, dado que $\triangle CRP \sim \triangle CAN$ y $\triangle BAK \sim \triangle BQP$, se obtiene:

$$\frac{AK}{QP} = \frac{BK}{BP} = \frac{RC}{AC} = \frac{RP}{AN} \Rightarrow \frac{AK}{RP} = \frac{PQ}{AN}$$

Dado que $\triangle AFN \sim \triangle QFP$ y $\triangle RGP \sim \triangle AGK$, se obtiene:

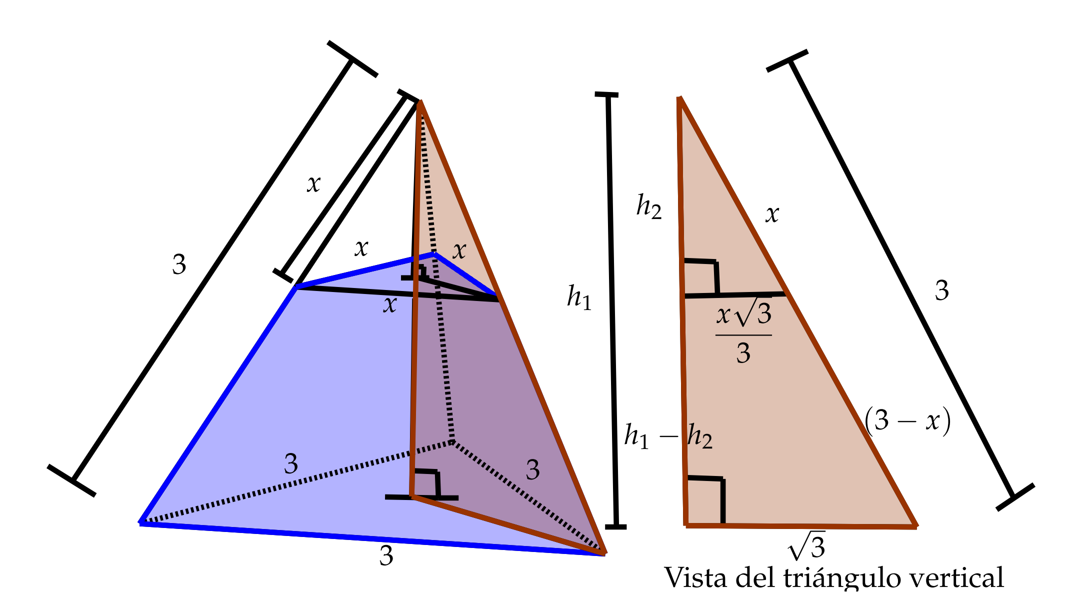
$$\frac{GK}{GP} = \frac{KA}{RP} = \frac{PQ}{AN} = \frac{FP}{FN} \Rightarrow \frac{GP + PK}{GP} = \frac{FN + NP}{FN} \Rightarrow \frac{PK}{GP} = \frac{PN}{FN}$$

Finalmente:

$$\frac{AR}{RG} = \frac{PK}{GP} = \frac{PN}{NF} = \frac{AQ}{AF} \Rightarrow RG = AF \Rightarrow BF = AB - AF = CR - RG = CG$$

3.3.10 El $\triangle BCP$ es isósceles ($\overline{BC}$ y $\overline{PC}$ radios), entonces $m\angle BPC = m\angle PBC = x$.
$\angle PBP'$ es recto (inscrito en el diámetro $\overline{PP'}$), entonces $m\angle CBP' = 90° - x$.
$\triangle BCP'$ es isósceles ($\overline{BC}$ y $\overline{P'C}$ radios), entonces $m\angle CP'B = 90° - x$.
$\angle CBP'$ y $\angle ABP'$ son complementarios, entonces $m\angle ABP' = x$.
$\triangle QCP'$ es rectángulo, así $m\angle CQP' = x$ y $m\angle AQB = x$ (opuestos por el vértice).
Luego, $\triangle ABQ$ es isósceles, por lo que $AB = AQ$.
Aplicando el teorema de Pitágoras al $\triangle ABC$ se tiene que $16 + r^2 = (r+2)^2$ de donde $r = 3$ cm. y $AC = 5$ cm; ahora, como $AC = AQ + QC$, entonces $QC = 1$ cm. y $TQ = 2$ cm.
Aplicando el teorema de Pitágoras al $\triangle QCP'$, se tiene que $QP' = \sqrt{10}$ cm.
Por potencia del punto Q respecto a la circunferencia se tiene que $BQ \cdot \sqrt{10} = 2 \cdot 4$ y así $BQ = \dfrac{4\sqrt{10}}{5}$ cm.

3.3.11 Observe que debido a que la superficie del agua dentro de pirámide corresponde a un plano paralelo a la base que descansa sobre una superficie horizontal, la cantidad de espacio vacío dentro de la pirámide, corresponde también, a su vez, a una pirámide cuyas caras son triángulos equiláteros.
Además note que la altura o nivel que alcanza el agua dentro de la pirámide, corresponde a la diferencia entre la altura total de la pirámide y la altura de la segunda pirámide (la que se forma con el espacio vacío).
Sean entonces:
h_1 la altura total de la pirámide grande.
h_2 la altura de la pirámide formada por el espacio vacío.
x la arista de la pirámide formada por el espacio vacío.
V_1 el volumen total de la pirámide grande.
V_2 el volumen de la pirámide formada por el espacio vacío.
Tomando en cuenta que la base de ambas pirámides son triángulos equiláteros, cuyas áreas se pueden calcular por medio de la fórmula $A = \dfrac{L^2\sqrt{3}}{4}$, con L el lado del triángulo, y como el volumen de un prisma se puede calcular mediante la fórmula $V = \dfrac{1}{3} \cdot A_b \cdot h$, siendo A_b el área de la base y h la altura del prisma.



Vista del triángulo vertical

Se puede establecer la razón entre los volúmenes de ambos prismas, de la siguiente manera:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot h_2}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4} \cdot h_1} = \frac{x^2 h_2}{3^2 h_1} = \left(\frac{x}{3}\right)^2 \frac{h_2}{h_1}$$

Por otra parte, si se considera que $V_2 = V_1 - 2$ al sustituir en la igualdad anterior se tiene que:

$$\frac{V_1 - 2}{V_1} = \left(\frac{x}{3}\right)^2 \frac{h_2}{h_1}$$

Por la semejanza de los triángulos verticales formados por la arista de la pirámide, el radio de la base, la altura de las pirámides, así como el radio del triángulo sobre la superficie del agua, se tiene que: $\frac{h_2}{h_1} = \frac{x}{3}$.
Al sustituir esto en la igualdad anterior se tiene que:

$$\frac{V_1 - 2}{V_1} = \left(\frac{x}{3}\right)^2 \frac{x}{3} \Longrightarrow \frac{V_1 - 2}{V_1} = \left(\frac{x}{3}\right)^3$$

Despejando se tiene que $x = 3\sqrt[3]{\frac{V_1 - 2}{V_1}}$ $\quad (\star)$

Además, por propiedades del triángulo equilátero de la base, se sabe que su radio mide $\sqrt{3}$ y por el teorema de Pitágoras se tiene que $h_1 = \sqrt{3^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6}$. Entonces se tendría que $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{6} = \frac{3\sqrt{18}}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$ dm^3 (Note que como era de suponerse $V_1 > 2$).
Al sustituir V_1 en $(\star)$ se tendría que:

$$x = 3\sqrt[3]{\frac{\frac{9\sqrt{2}}{4} - 2}{\frac{9\sqrt{2}}{4}}} = 3\sqrt[3]{\frac{\frac{9\sqrt{2}-8}{4}}{\frac{9\sqrt{2}}{4}}} = 3\sqrt[3]{\frac{9\sqrt{2} - 8}{9\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{3^3 \cdot \frac{\left(9\sqrt{2} - 8\right)}{9\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} = \sqrt[3]{27 - 12\sqrt{2}}.$$

Finalmente, al aplicar el teorema de Thales en los triángulos verticales señalados anteriormente, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\frac{h_1 - h_2}{h_1} &= \frac{3 - x}{3} \\
\Longrightarrow h_1 - h_2 &= h_1 \cdot \frac{3 - x}{3} \\
\Longrightarrow h_1 - h_2 &= \sqrt{6} \cdot \frac{\left(3 - \sqrt[3]{27 - 12\sqrt{2}}\right)}{3} \\
\therefore h_1 - h_2 &= \frac{\sqrt{6}}{3}\left(3 - \sqrt[3]{27 - 12\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

Así, el agua alcanza una altura dentro de la pirámide de $\frac{\sqrt{6}}{3}\left(3 - \sqrt[3]{27 - 12\sqrt{2}}\right)$ dm.

Solución alternativa
Observe que debido a que la superficie del agua dentro de pirámide corresponde a un plano paralelo a la base que descansa sobre una superficie horizontal, la cantidad de espacio vacío dentro de la pirámide, corresponde también, a su vez, a una pirámide cuyas caras son triángulos equiláteros.

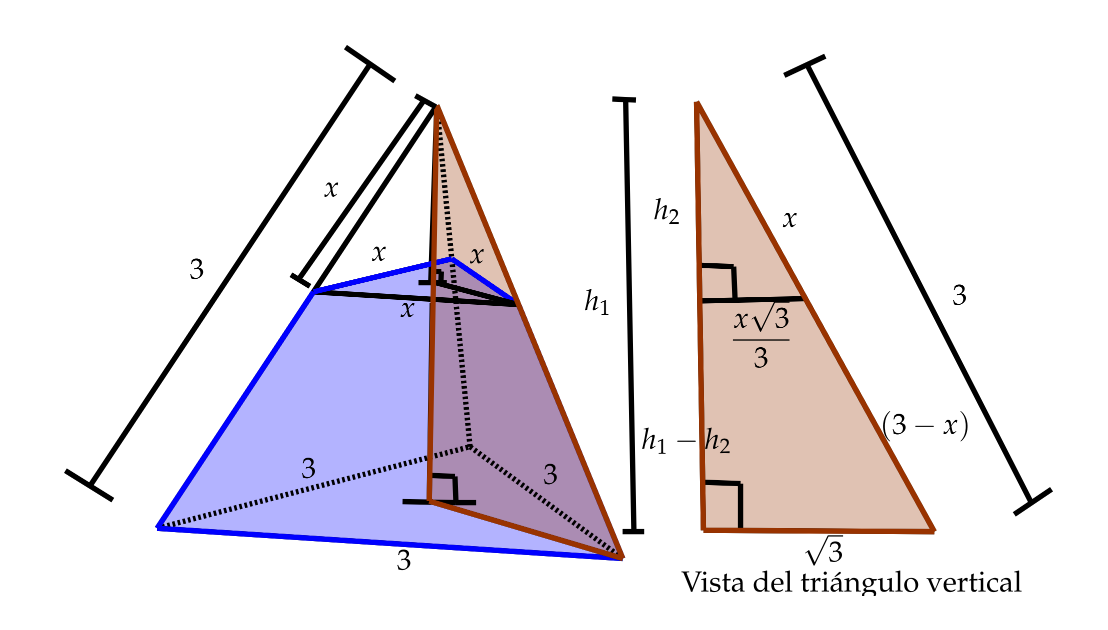
Además, note que la altura o nivel que alcanza el agua dentro de la pirámide, corresponde a la diferencia entre la altura total de la pirámide y la altura de la segunda pirámide (la que se forma con el espacio vacío).

Sean entonces:

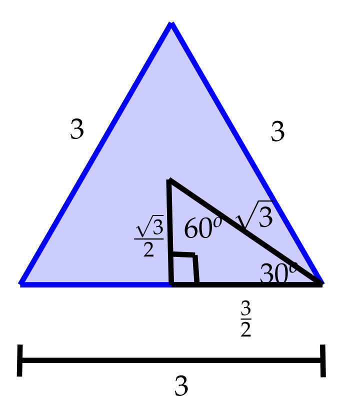
h_1 la altura total de la pirámide grande.
h_2 la altura de la pirámide formada por el espacio vacío.
x la arista de la pirámide formada por el espacio vacío.
V_1 el volumen total de la pirámide grande.
V_2 el volumen de la pirámide formada por el espacio vacío.

Dado que todas las caras de la pirámide están compuestas por triángulos equiláteros, se pueden establecer relaciones conocidas en el mismo (o triángulos especiales), así como el teorema de Pitágoras en algún triángulo vertical para determinar h_1 y h_2.

Se utilizará el triángulo vertical formado por la altura de la pirámide, la arista y el radio de la base, aunque también puede utilizarse el triángulo formado por la altura, el apotema de la base y el apotema de la pirámide.

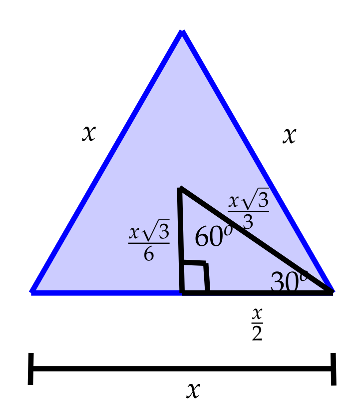


Vista de la base de la pirámide



Por el teorema de Pitágoras se tiene que $h_1 = \sqrt{3^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{6}$.
Entonces, se tendría que $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{6} = \frac{3\sqrt{18}}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$ dm^3 (Note que como era de suponerse $V_1 > 2$).
Por un razonamiento similar, aplicado a la pirámide pequeña, se puede deducir que el radio del triángulo que se forma en la superficie del agua mide $\dfrac{x\sqrt{3}}{3}$ dm.

Vista de la superficie del agua



Aplicando el teorema de Thales en el triángulo vertical, se tiene que $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \dfrac{h_2}{\frac{x\sqrt{3}}{3}}$, de lo que podemos despejar que $h_2 = \dfrac{x\sqrt{6}}{3}$.
Ahora bien, para encontrar el valor de x, podemos calcular V_2 por medio de dos razonamientos distintos, para poder establecer una ecuación en la cual podamos despejar el valor de la arista de la pirámide pequeña (x).

De acuerdo con los datos del enunciado se tiene que $V_2 = V_1 - 2 = \frac{9\sqrt{2}}{4} - 2 = \dfrac{9\sqrt{2} - 8}{4}$ dm^3.
Utilizando la fórmula de volumen de la pirámide, se tiene que:

$V_2 = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{x\sqrt{6}}{3} = \dfrac{x^3\sqrt{2}}{12}$ dm^3.

Igualando las expresiones obtenidas para V_2:

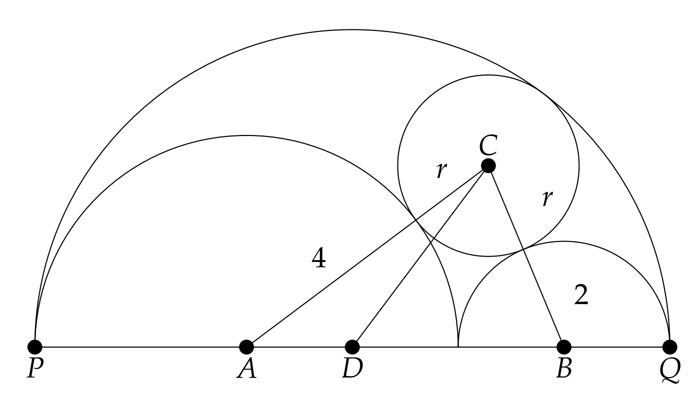
$$\frac{x^3\sqrt{2}}{12} = \frac{9\sqrt{2}-8}{4}$$
$$x^3\sqrt{2} = 3\left(9\sqrt{2}-8\right)$$
$$x^3 = \frac{27\sqrt{2}-24}{\sqrt{2}}$$
$$x^3 = 27 - 12\sqrt{2}$$
$$x = \sqrt[3]{27-12\sqrt{2}}$$

Se tendría entonces que $h_2 = \dfrac{x\sqrt{6}}{3} = \dfrac{\sqrt[3]{27-12\sqrt{2}} \cdot \sqrt{6}}{3}$ dm.

Por lo tanto, la altura o nivel que alcanza el agua dentro de la pirámide corresponde a $h_1 - h_2 = \sqrt{6} - \dfrac{\sqrt[3]{27-12\sqrt{2}} \cdot \sqrt{6}}{3} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}\left(3 - \sqrt[3]{27-12\sqrt{2}}\right)$ dm.

3.3.12 Sea r el radio del círculo con centro en C. Sea D el centro del círculo más grande. Entonces $AC = 4 + r$, $AD = 2$, $DB = 4$ y $CB = 2 + r$.

Observe que $(DBC) = 2\,(ADC)$. Además, observe que $DC + r = 6$, pues se puede construir un radio del círculo con centro en D, si se prolonga $\overline{DC}$ hasta intersecar la circunferencia.



De esto, se puede deducir que el semiperímetro del $\triangle ACD$ es

$$\frac{1}{2}\left(AC + DC + AD\right) = \frac{1}{2}\left(4 + r + DC + 2\right) = \frac{1}{2}(4+6+2) = 6$$

El semiperímetro del $\triangle DBC$ es

$$\frac{1}{2}\left(DC + CB + DB\right) = \frac{1}{2}\left(DC + 2 + r + 4\right) = \frac{1}{2}(6+2+4) = 6$$

Aplicando la fórmula de Herón en los triángulos $\triangle ADC$ y $\triangle DBC$ se tiene que:

$$2\sqrt{6 \cdot 4 \cdot r \cdot (2-r)} = \sqrt{6 \cdot 2 \cdot r \cdot (4-r)}$$

Resolviendo la ecuación se obtiene que $r = \dfrac{12}{7}$.

3.3.13 Defina $g(n,m)$ el número de secuencias finitas de 1's y 0's tal que cada secuencia empieza en 1 y no hay tres 0's o tres 1's consecutivos y tiene exactamente n 0's y m 1's.
Nótese que $f(n,m) = g(m,n)$. Ahora, las secuencias citadas, que inician en 0, pueden tener un solo 0 al inicio, y luego un 1, o bien, dos ceros y luego un 1, por lo que se tiene

$$f(n,m) = g(m,n-1) + g(m,n-2)$$

Dado que se puede aplicar el mismo razonamiento a g, se tendría que

$$g(m,n-1) = f(n-1,m-1) + f(n-1,m-2)$$

$$g(m,n-2) = f(n-2,m-1) + f(n-2,m-2)$$

de donde se puede concluir lo solicitado.

Simbología

$\overline{AB}$	segmento de extremos A yB	$\angle ABC \approx \angle DEF$	congruencia de ángulos
AB	medida del $\overline{AB}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$	congruencia de triángulos
$\overrightarrow{AB}$	rayo de extremo A y que contiene a B	$ABC \leftrightarrow DEF$	correspondencia respectiva entre puntos
$\overleftrightarrow{AB}$	recta que contiene los puntos A y B	$\triangle ABC \sim \triangle DEF$	semejanza de triángulos
$\angle ABC$	ángulo de rayos $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$	$\overline{AB} \cong \overline{CD}$	congruencia de segmentos
$m\angle ABC$	medida del $\angle ABC$	$\widehat{AB}$	arco de extremos A y B
$\triangle ABC$	triángulo de vértices A, B, C	$m\widehat{AB}$	medida del $\widehat{AB}$
$\square ABCD$	cuadrilátero de vértices A, B, C, D	(ABC)	área del $\triangle ABC$
$\parallel$	paralelismo	$(ABCD)$	área del $\square ABCD$
$\perp$	perpendicularidad	$P - Q - R$	P, Q, R puntos colineales, con Q entre los puntos P y R

Bibliografía

[1] Andreescu, T. y Gelca, R. (2000). “*Mathematical Olympiad Challenges*”. Segunda edición. Birkhauser, Boston. USA.

[2] Bulajich, R; Gómez, J. y Valdez, R. (2000). “*Inequalities: A Mathematical Olympiad Approach*”. Birkhäuser Verlag AG, Berlin. Germany.

[3] Bulajich, R. y Gómez, J. (2002). “*Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas - Geometría*”. Instituto de Matemáticas, UNAM. México.

[4] Bulajich, R; Gómez, J. y Valdez, R. (2016). “*Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas - Álgebra*”. Tercera edición. Instituto de Matemáticas, UNAM. México.

[5] Chen, E. (2016). “*Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads (Maa Problem)*”. MAA Press. USA.

[6] Engel, A. (1998). “*Problem-solving strategies*”. Springer-Verlag, New York. USA.

[7] Illanes, A. (2002). “*Cuadernos de Olimpiadas de Matemáticas - Principios de olimpiada*”. Instituto de Matemáticas, UNAM. México.

[8] Lidski, V; Ovsianikov, L; Tulaikov, A. y Shabunin, M. (1978). “*Problemas de matemáticas elementales*”. Segunda edición. MIR, Moscú. Rusia.